4. gyakorlat
Matematika A2

1. Tekintsük azokat az $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényeket ($\mathbb{C}$ mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér), melyek értéke tetszőleges $z = a + b\imath$ helyen:

   a) $f(z) = a$ b) $f(z) = a^2$ c) $f(z) = \overline{z}$ d) $\sqrt{a^2 + b^2}$

   Mely esetekben lesz f lineáris funkcionál?

2. Tegyük fel, hogy az f függvény a $\mathbb{C}^3$-beli ($\mathbb{C}^3$ mint $\mathbb{C}$ feletti vektortér) $x = (z_1, z_2, z_3)$ helyen a következő értéket veszi fel:

   a) $f(x) = z_1 + z_2$ b) $f(x) = z_1 - z_3^2$ c) $f(x) = z_1 + 1$ d) $f(x) = z_1 - 2z_2 + 3z_3$

   Mely esetekben lesz f lineáris funkcionál?

3. Tegyük fel, hogy az f függvény értéke bármely $\mathcal{P}$-beli p helyen:

   a) $f(p) = \int_{-1}^{2} p(x)dx$ b) $f(p) = \int_0^2 [p(x)]^2 dx$ c) $f(p) = \int_0^1 x^2 p(x)dx$ d) $f(p) = \int_0^1 p(x^2)dx$

   Mely esetekben lesz f lineáris funkcionál?

4. Állapítsuk meg a következő szimmetrikus bilineáris függvények (ill. a hozzájuk tartozó kvadd-ratikus alakok) jellegét:

   a) S a szokásos skalárszorzat $\mathbb{R}^4$-en

   $\mathcal{P}_4$ legyen a legfeljebb 4-edfokú valós polinomok szokásos vektortere

   b) $S(f, g) = f(1)g(1)$

   c) $S(f, g)$ legyen fg-ben x^2 együtthatója

   Legyen $dimV = 3$, és $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ egy rögzített $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ bázisra vonatkozóan

   d) $S(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i,j=1}^{3} iju_iv_j$

   e) $S(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i,j=1}^{3} (i + j - 1)u_iv_j$

5. Írjuk át az alábbi (3 ill. 4-dimenziós) kvadratikus alakokat előjeles négyzetösszeggé:

   a) x_1x_2 b) $x_1x_2 + x_2x_3$ c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

   d) $\sum_{i,j=1}^{4} x_ix_j$ e) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$ f) $\sum_{i<j} x_ix_j$

6. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét:

   a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

   e) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

7. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 13 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$