**5. gyakorlat**
**Matematika A2**

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1+\imath & \imath \\ \imath & \imath \end{bmatrix}$

2. Gauss elminációval oldjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszereket:

a) $\begin{aligned} 3x_1+5x_2+2x_3&=0\\ 4x_1+7x_2+5x_3&=0\\ x_1+x_2-4x_3&=0\\ 2x_1+9x_2+6x_3&=0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 5x_1+3x_2+4x_3&=0\\ 6x_1+5x_2+6x_3&=0 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 2x_1+x_2-4x_3&=0\\ 3x_1+5x_2-7x_3&=0\\ 4x_1-5x_2+6x_3&=0 \end{aligned}$

3. Határozzuk meg az alábbi inhomogén egyenlet rendszerek mátrixának és kiegészített mátrixának a rangját, majd ezek alapján döntsük el, hogy megoldható-e, és ha igen egyértelmű-e a megoldás:

a) $\begin{aligned} 2x_1+x_2-5x_3+x_4&=8\\ x_1-3x_2-6x_4&=9\\ 2x_1-x_2+2x_4&=-5\\ 1x_1+4x_2-7x_3-6x_4&=18 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1-8x_2+x_4&=0\\ 2x_1+x_2&=3\\ 4x_1+7x_2&=-4 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=4\\ -x_1+x_2-x_3&=2\\ 2x_1+x_2+2x_3&=1\\ 4x_1+4x_2+4x_3&=1 \end{aligned}$

4. Adjunk meg a (közönséges háromdimenziós) térben egy-egy olyan transzformációt, amelynek 1,2, illetve 3 (különböző) sajátértéke van.

5. Mutassuk meg, hogy ha egy transzformáció mátrixa valamely bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, akkor van olyan bázis, amelyben ugyanennek a transzformációnak a mátrixa $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Írjuk fel az alábbi síkbeli transzformációk karakterisztikus polinomját:
   a) tükrözés origón átmenő egyenesre
   b) 90 illetve 60 fokos elforgatás az origó körül
   c) helybenhagyás
   d) középpontos tükrözés az origóra
   e) origón átmenő egyenesre vetítés
   f) 5-szörös nagyítás az origóból

7. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit sajátvektorait:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

8. Szemléltessük a főtengelytételt a következő mátrixokon:

a) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. Az a) és b) esetben bontsuk fel a következő mátrixokat egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére, a c) esetben pedig igazoljuk, hogy a mátrixnak van negatív képzetes részű sajátértéke, és határozzuk meg a hozzá tartozó sajátvektort.

a) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$