6. gyakorlat
Matematika A2

1. Tekintsük a síkon a szokásos skalárszorzatot. Adjuk meg az alábbi transzformációk adjungáltjait:
   a) tükrözés origőn átmenő egyenesre
   b) origó körüli α fokos forgatás
   c) origón átmenő egyenesre való merőleges vetítés
   d) y-tengelyel párhuzamos vetítés az $y = x$-re

2. Tekintsük az $\mathbb{R}^5$ euklideszi teret a szokásos skalárszorzattal. Adjuk meg az alábbi alterek merőleges kiegészítőit:
   a) $W_1 = \{\underline{v} | v_1 = v_2 = 0\}$
   b) $W_2 = \{\underline{v} | v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5\}$
   c) $W_3 = \{\underline{v} | \sum_{j=1}^{5} v_j = 0,\, 2v_1 + v_2 = v_4 + 2v_5\}$

3. Mennyi egy ortonormált bázis két elemének távolsága?

4. Mennyi az $\underline{x}$ és $\underline{z}$ vektorok szöge, ha $||x\| = \|z\| = \|x - z\| \neq 0$?

5. Milyen szöget zárnak be az $\mathbb{R}^4$ szokásos euklideszi térben az alábbi vektorok?
   a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Mutassuk meg, hogy az alábbi összefüggések skalárszorzatot definiálnak $\mathcal{P}_2$-n, és adjunk meg egy-egy ortonormált bázist:
   a) $\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$
   b) $f(1)g(1) + f'(1)g'(1) + f''(1)g''(1)$
   c) $\sum_{|j|<5} f(j)g(j)$

7. Mi lenne az előző feladat beli skalárszorzatokra a kétszeri differenciálás operátor adjungáltja?

8. Definiáljuk és számítsuk ki az $\mathbb{R}^4$ szokásos euklideszi térben az $U = \{\underline{u} | u_1 + u_2 + u_3 + u4 = 0\}$ altér és az $(1, 2, 3, 4)^T$ vektor távolságát.

9. Az alábbi $\mathbb{C}^4$-en értelmezett transzformációk közül melyek lesznek normálisak, önadjungáltak, unitérek?
   a) $\mathcal{A}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
   b) $\mathcal{B}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
   c) $\mathcal{C}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$

10. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ szokásos valós euklideszi teret. Az alábbi transzformációk közül melyek szimmetrikusak ill. ortogonálisak? Mindkét esetben adjuk meg a hozzájuk tartozó ortonormált bázist, és a megfelelő mátrixot:
    a) $\mathcal{A}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$
    b) $\mathcal{B}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
    c) $\mathcal{C}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \\ u_3 + u_4 \\ u_3 - u_4 \end{pmatrix}$
    d) $\mathcal{D}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \end{pmatrix}$

11. Jellemezzük geometriailag a sík és a tér szimmetrikus ill. ortogonális transzformációit!