7. gyakorlat
Matematika A2

1. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós valós f függvények határértékeit:

a) $lim_{x,y\to\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ b) $lim_{x,y\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ c) $lim_{x,y\to 0}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

d) $lim_{x\to 1,y\to 0}\frac{ln(x+e^y)}{x^2+y^2}$ e) $lim_{x,y\to 0}\frac{x-y}{x+y}$ f) $lim_{x,y\to 0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$

g) $lim_{x,y\to 0}\frac{xy^2}{x^3+y^3}$ h) $lim_{x,y\to 0}\frac{x^3y}{x^6+y^2}$ i) $lim_{x,y\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban.

3. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi kétváltozós valós $f(x,y)$ függvényekre és a megadott x_0, y_0 értékekre léteznek-e az

$$L_{12}=lim_{x\to x_0}[lim_{y\to y_0}f(x,y)],\ L_{21}=lim_{y\to y_0}[lim_{x\to x_0}f(x,y)],\ L=lim_{x\to x_0,y\to y_0}f(x,y)$$

határérétkek, és ha igen, határozzuk meg ezeket:

a) $\frac{xy-x+y}{xy+x+y}$, $x_0=y_0=0$, b) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $x_0=y_0=0$,

c) $f(x,y)=\begin{cases} xsin\frac{1}{y}+ysin\frac{1}{x}, \text{ ha } x\neq 0 \text{ és } y\neq 0\\ 0, \text{ ha } x=0 \text{ vagy } y=0\end{cases}$

4. A sík ill. a tér mely pontjaiban folytonosak az alábbi függvények?

a) $f(x,y)=sin(x+y)$ b) $f(x,y)=ln(x^2+y^2)$ c) $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y}$

d) $f(x,y,z)=lnxyz$ e) $f(x,y,z)=e^{x+y}cosz$ f) $f(x,y,z)=\frac{1}{|y|+|z|}$

5. Definiáljuk az $f(0,0)$ értéket úgy, hogy az

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

függvény folytonos legyen az origóban!

6. Adjuk meg az annak a szintvonalnak ill. szintfelületnek az egyenletét, amely átmegy a megadtott ponton:

a) $f(x,y)=16-x^2-y^2$, $(2\sqrt{2},\sqrt{2})$ b) $f(x,y)=\sqrt{x^2-1}$, $(1,0)$

c) $f(x,y,z)=\sqrt{x-y}-lnz$, $(3,-1,1)$ d) $f(x,y,z)=ln(x^2+y+z^2)$, $(-1,2,1)$

7. Vizsgáljuk a megadott t_0 helyen az alábbi vektor értékű függvényeket határérték és folytonosság szempontjából:

a) $\frac{1}{t}i+\frac{t^2-9}{t-3}j-tk$, $t_0=3$ b) $te^ti+t^2j+\frac{1}{(t-1)^2}k$, $t_0=1$ c) $tsin\frac{1}{t}i+\frac{sint}{t}j+t^2k$, $t_0=0$

8. Határozzuk meg az alábbi térgörbék t_0 pontjában az érintő egyenletét.

a) $r(t)=i\frac{1}{1-t}+jln(1+t^2)+ke^{-t}$, $t_0=2$ b) $r(t)=it^2+j\frac{t+1}{t}+k\frac{t}{t+1}$, $t_0=1$

c) $r(t)=icost+jsint+k\frac{1}{sint}$, $t_0=\frac{\pi}{4}$ d) $r(t)=icos^2t+jsin^2t+kt^2$, $t_0=\frac{\pi}{4}$