

8. gyakorlat Matematika A2

1. Közvetlenül a definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi számsorok konvergensek, és határozzuk meg a sorok s összegét:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n, a > 0$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^{3n}}{3^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(a^2+a-1)^n}, a \in \mathbb{R}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{10^{2n+1}} + \frac{2}{10^{2n+2}}\right)$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{3}i)^{9n}}{1024^n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

2. Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^k}, a > 1, k \in \mathbb{N}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{5^{n+a-1}}, a \in \mathbb{R}^+$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n+in}}$

3. A majoráns- illetve minoránskritérium segítségével öntsük el az alábbi sorok konvergenciáját:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-16}{n^5+n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \frac{n}{2})^{4n}}{n^n+1}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n^2-n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n}$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^5+1}}$

4. A hányados- illetve a gyökkritérium segítségével döntsük el az alábbi sorok konvergenciáját:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1}\right)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

h) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

5. Vizsgáljuk meg az alábbi sorok konvergenciáját az integrálkritérium segítségével:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$