9. gyakorlat
Matematika A2

1. Döntsük el, hogy az alábbi váltakozó előjelű sorok konvergensek vagy divergensek:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$, $a<-1$
   d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$, $k\in\mathbb{N}, a<-1$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{100}99^n}{100^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^k}{n!}$, $k\in\mathbb{N}$

2. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi valós számsorok közül melyek abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\sqrt[3]{n}}$
   d) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^{2n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos n)^n}{n^2+1}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n(n+1)}$

3. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3^n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-n}{3^n}$ sorok összeg- és különbségsora?

4. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ sorok különbségsora?

5. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ sorok Cauchy-szorzata?

6. Számítsuk ki az alábbi függvények iránymenti deriváltjait a megadott P pontban az **a** vektor irányában:
   a) $f(x,y,z)=2^xyz$, $P(1,-1,1)$, $\mathbf{a}=2j-k$ b) $f(x,y)=2x^2-3xy+y^2+15$, $P(1,1)$, $\mathbf{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}i+\frac{1}{\sqrt{2}}j$
   c) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $P(3,40)$, $\mathbf{a}=\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}j$ d) $f(x,y,z)=xe^{y^2}z$, $P(2,1,0)$, $\mathbf{a}=i-j+\sqrt{2}k$

7. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények α iránymenti deriváltját a P helyen:
   a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\alpha=60°$, $P(\sqrt{3},-1)$ b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha=135°$, $P(-5,5)$
   c) $f(x,y)=tg(2x+y)$, $\alpha=\frac{7\pi}{4}$, $P(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$

8. Számítsuk ki az alábbi függvények gradiensét a megadott pontban:
   a) $f(x,y)=x\ln(x+y)$, $P(-2,3)$ b) $f(x,y)=arccos\frac{x}{y}$, $P(1,2)$
   c) $f(x,y,z)=y-\sqrt{x^2+y^2}$, $P(3,-4,7)$ d) $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$, $P(1,-2)$

9. Hol nullvektor az alábbi függvények gradiense?
   a) $f(x,y,z)=3x^2-4xy+2x+y^2+1$ b) $f(x,y)=x^2+xy+2y^2-5x+y+3$
   c) $f(x,y,z)=2x^2+y^2-z^2+2xy-3x+2y+z$

10. Határozzuk meg az alábbi függvények másodrendű parciális deriváltjait:
    a) $f(x,y)=x^y$ b) $f(x,y,z)=x^{y^z}$ c) $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$

11. Határozzuk meg az alábbi függvények feltüntetett deriváltjait:
    a) $f(u,v)=u^2v-uv^2$, $z(x,y)=f(x\cos y, x\sin y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$
    b) $f(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$, $z(x,y)=f(xe^y, x^2-3y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

12. Írjuk fel az alábbi függvények teljes differenciálját a megadott helyeken:
    a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $P(3,4)$, $Q(x,y)$ b) $f(x,y,z)=\frac{x^2y}{4-z^2}$, $P(x,y,z)$, $Q(1,0,1)$
    c) $f(x,y,z)=7x-2y$, $P(x,y,z)$, $Q(1,1,1)$

13. Egy gömb átmérőjét 10 cm-nek mérjük. A mérés pontossága ±0.1mm. Becsüljük meg a gömbtérfogat ennek alapján számított értékének pontosságát!

14. Írjuk fel az alábbi függvények megadott helyhez tartozó második Taylor polinomját:
    a) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$, $P(1,-2)$ b) $f(x,y)=\sin x\sin y$, $P(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$

15. Írjuk fel az alábbi függvények megadott helyhez tartozó harmadik Taylor polinomját:
    a) $f(x,y)=x^y$, $P(1,1)$ b) $f(x,y)=x^2y$, $P(1,1)$

16. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjának mátrixát a megadott helyen:
    a) $v(x,y)=[\sin x+\cos y, e^{xy}]$, $r_0=[0,0]$ b) $v(x,y)=[x^2,x^2,x+y]$, $r_0=[1,3]$

17. Mutassuk meg, hogy bármely T tenzor deriváltja minden pontban önmaga, azaz T!