10. gyakorlat
Matematika A2

1. Keressük meg az alábbi függvények szélsőértékeit:
   a) x^3+y^3-3xy b) $4x^2+2xy+5y^2+2$ c) $2x^4+y^4-x^2-2y^2$
   d) x^4+y^4 e) x^4+y^4-4xy f) $xy^2(1-x-2y)$

2. Keressük meg az alábbi egyenletekkel implicit alakban megadott függvények szélsőértékeit:
   a) $5(x^2+y^2+z^2)-2(xy+xz+yz)-72=0$ b) $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$

3. Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút minimumát és maximumát a megadott tartományon:
   a) $f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y-3$, $\{(x,y): x\geq 0, y\geq 0, y\leq 9-x\}$
   b) $f(x,y)=x^2+y^2-xy$, $\{(x,y): x\leq 4, 0\leq y\leq x\}$

4. Határozzuk meg az alábbi függvényeknek a megadott feltételekre vonatkozó feltételes szélsőértékeit a Lagrange-féle multiplikátoros módszerrel:
   a) $f(x,y)=xy$, $x^2+y^2=1$ b) $f(x,y)=x^2+y^2$, $xy=3$
   c) $f(x,y)=xy$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ d) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

5. Keressük meg azon pontokat az $x^2+y^2+z^2=36$ gömbön, amelyek távolsága a P(1,2,2) ponttól a legnagyobb, ill. legkisebb.

6. Írjuk fel az alábbi, felületek metszésvonalaként megadott, térgörbék P_0 pontjához tartozó érintő egyenletét:
   a) $x^2+y^2=5$, $y^2+z^2=8$, $P_0(1,2,2)$ b) $x^2+y^2+z^2=3$, $x-y+2z=2$, $P_0(1,2,2)$
   c) $y=x^2$, $z=y^2$, $P_0(1,1,1)$

7. Írjuk fel az alábbi felületek vektormentes egyenletét:
   a) $r=iv\cos u+jv\sin u+kv$, $0\leq u<2\pi$ b) $r=ia\cos u+ja\sin u+kv$, $a>0$, $0\leq u<2\pi$
   c) $r=iu+ju^2kv$

8. Írjuk fek az alábbi felületek paraméteres vektoregyenletét:
   a) $z=xy$ b) $x^2+y^2=z^2$ c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

9. Számítsuk ki $r=(u^2-v^2)i+2uvj+(u^2+v^2)k$ felület (1,2) paraméterű pontján átmenő paramétervonalak szögét.

10. Írjuk fel az adott ponthoz tartozó érintősík egyenletét, valamint a felületi normális egyenletrenszerét:
    a) $z=x^2y+2y^2$, $P_0(2,1,6)$ b) $x^2y+z^2+yz=0$, $P_0(0,-1,1)$
    c) $z=x^3+y^3$, $P_0(1,2,9)$

11. Határozzuk meg az $xyz=1$ egyenletű felület azon érintősíkjait, amelyek párhuzamosak az $x+y+z=5$ egyenletű síkkal.

12. Határozzuk meg az $r=(u+v)i+(u^2+u)j+(v^2+v)k$ felületen azokat a pontokat, ahol az $|r_u\times r_v|^2$ kifejezésnek szélsőértéke van.

13. Számítsuk ki a következő integrálokat:
    a) $\int_{-3}^{2}\int_0^1 y^2xdydx$ b) $\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}dydx$ c) $\int_0^3\int_0^1 x\sqrt{x^2+y}dydx$

14. Számítsuk ki az alábbi görbékkel meghatározott tartományok területét:
    a) $y=2x-x^2$, $y=x^2$ b) $y^2=9-x$, $y^2=9-9x$

15. Számítsuk ki az alábbi integrálokat a megadott tartományon:
    a) $\int\int_V (x+y)dv$, V határgörbéi: $x=0, y=0, x+y=2$
    b) $\int\int_V xydv$, V határgörbéi: $y=0, y=6-x, y=\sqrt{x}$
    c) $\int_0^1\int_y^1 ex^2dxdy$, (integrálcsere)
    d) $\int_1^4\int_{\sqrt{y}}^2 \sin(\frac{x^3}{3}-x)dxdy$, (integrálcsere)

16. Számítsuk ki az alábbi felületek által határolt tartományok térfogatát:
   a) $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 2$
   b) $y = 0, y = 2, z = 0, z = 2 - 2x^2$

17. Számítsuk ki az $f(x, y, z) = z$ függvénynek az $x = 0, y = 0, z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ felületekkel határolt tartományon vett integrálját.

18. Határozzuk meg a $V = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ síklemez tömegközéppontjének koordinátáit, ha V tömegeloszlása $\varrho(x, y) = ky$.