11. gyakorlat
Matematika A2

1. Polárkkordináták bevezetésével számoljuk ki az alábbi integrálokat:
   a) $\int_{x^2+y^2\le R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ b) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)dxdy$ c) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2+y^2)dxdy$

2. Számítsuk ki a $V = \{(x,y,z); z \le \sqrt{4-x^2-y^2}, x^2+y^2 \ge 1, z > 0\}$ tartomány térfogatát.

3. Számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvény integrálját az $y = px$, $y = qx$ egyenesek és az $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$ görbék által határolt tartományon. $(0 < a < b,\ 0 < p < q)$
   Hengerkoordináták bevezetésével számítsuk ki az alábbi V tartományok térfogatát:
   a) V a $z = 2$, $z = 0$, $x^2+y^2 = 1$ felöletek által határolt tartomány
   b) $V = \{(x,y,z); x^2+y^2 \le az, x^2+y^2+z^2 \le 2az\}$

4. Hengerkoordináták ill. módosított hengerkoordináták segítségéve számítsuk az alábbi integrálokat:
   a) $\int_V z^2 dxdydz$, ahol $V = \{(x,y,z); x^2+y^2 \ge a^2, x^2+y^2+z^2 \le 4a^2\}$
   b) $\int_V 1dxdydz$, ahol V az $y^2+z^2 = x$ és az $y = x$ felületek által határolt tartomány.
   c) $\int_V 2ye^{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}dv$, $V = \{(x,y,z); \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 1, 0 \le y \le 1\}$

5. Határozzuk meg a $V = \{(x,y,z); (\frac{z}{c}-1)^2 \ne \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, 0 \le z \le c\}$ térrészt betöltő homogén testtömegközéppontjának koordinátáit.

6. Térbeli (módosított) polárkoordináták segítségével számoljuk ki az alábbi integrálokat:
   a) $\int_V 1dv$, ahol V az $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3z$ felület által határolt tartomány
   b) $\int_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$, v az $x^2+y^2+z^2 = z$ felület által határolt tartomány
   c) $\int_V 1dv$, ahol V az $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^2 = \frac{x}{h}$ által határolt tartomány

7. Számítsuk ki az $x = 6-y^2-7z^2$ és az $x = 5y^2+5z^2$ egyenletű paraboloidok által határolt test térfogatát integráltranszformációval, és anélkül.

8. Számítsuk ki a 2R sugarú origó közepű gömb és az R sugarú, $(x-R)^2+y^2 \le R^2$ egyenlettel megadott henger közös részének térfogatát. (Viviani-féle test)

9. Számítsuk ki az alábbi térgörbék ívhosszát a megadott paraméterintervallumban:
   a) $r(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t;\ 0 \le t \le 2$ b) $r(t) = (t+1, \frac{t^2}{2}, \frac{2\sqrt{2t^3}}{3});\ -2 \le t \le 0$
   c) $r(t) = (t, \sqrt{4t-t^2}, 2\ln(1-\frac{t}{4}));\ 0 \le t \le 1$ d) $r(t) = (\cos\ln t, \sin\ln t, t);\ 0 \le t \le \sqrt{3}$

10. Írjuk át ívhosszparaméterre:
    a) $r(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$ b) $r(t) = (t^2, \cos t^2, \sin t^2)$ c) $r(t) = (t, 2t-1, 3(t-1))$

11. Számítsuk ki az $r(u,v) = (u^2, 2u\cos v, 2u\sin v)$ felület felszínét az $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$ paramétertartományon.

12. Egy vékony fémhuzalt az xy koordinátasíkban az $x^2+y^2 = 1$ $(y \ne 0)$ egyenlettel adunk meg. Számítsuk ki a tömegközéppontját, ha a sűrűségfüggvénye $\varrho(x, yz) = 2-y$.

13. Számítsuk ki az $y^2+z^2 = a^2$, $0 \le x \le a$ feltétellel megadott felületdarab felső felének tömegközéppontját, ha a sűrűsége állandó.