12. gyakorlat
Matematika A2

1. Határozzuk meg a következő függvénysorozatok D értelmezési tartományát, K konvergenciatartományát, és f határfüggvényét:

   a) $a_n = \frac{n^2z+6n}{3n^2+nz}$ b) $a_n = \frac{z^n}{3} + \frac{z^{n+1}}{4}$ c) $a_n = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ d) $a_n = n\sin\frac{x}{n}$

2. Határozzuk meg a következő függvénysorok D értelmezési tartományát, K konvergenciatartományát, és s összegfüggvényét:

   a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z)^n}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z}{n(n+1)}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n$ e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2z^n$

3. Határozzuk meg a következő függvénysorok D értelmezési tartományát, K konvergenciatartományát. Továbbá döntsük el, hogy a K pontjain abszolút konvergens-e:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4+x^2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{z^n}{1+z^n}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

4. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok r konvergenciasugarát, adjuk meg a K konvergenciaintervallumát, továbbá döntsük el, hogy K határpontjaiban konvergens-e:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}x^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$ d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n-1)}$

5. Számítsuk ki az alábbi komplex változós hatványsorok r konvergenciasugarát, és adjuk meg a konvergenciakör z_0 középpontját:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}z^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n^2 2^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(z+1-i)^n}{n!}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$

6. Határozzuk meg a következő hatványsorok s összegfüggvényét és K konvergenciaintervallumát:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{a^{n+1}}$ d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{na^{n-1}}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

7. Írjuk fel a következő függvények Maclaurin-sorát és állapítsuk meg, hogy ez a hatványsor mely intervallumban állítja elő a függvényt:

   a) $\sin x$ b) a^x c) e^{-x^2} d) shx e) $ch\frac{x}{2}$ f) $x\ln(x+1)$
   g) $\ln(1-x^2)$ h) $\frac{x}{2-x}$ i) $\frac{1}{1-2x^2}$ j) $arctgx$ k) $\frac{1}{x^2-5x+6}$ l) $\cos^2 x$

8. Számítsuk ki a következő függvények $x = a$ helyen, t tizedesjegyre kerekített értékét a függvény egy alkalmas Taylor-sora segítségével:

   a) e^x; $a = 1,\ t = 4$ b) $\sin x$; $a = \frac{\pi}{60},\ t = 5$ c) $\ln x$; $a = 2,\ t = 4$

9. Számítsuk ki a következő határozott integrálokat a megadott h pontossággal:

   a) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}$; $h = 10^{-4}$ b) $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{x}$; $h = 10^{-5}$ c) $\int\limits_0^1 \frac{shx}{x}$; $h = 10^{-6}$

10. Határozzuk meg az alábbi számsorok összegét alkalmasan választott hatványsorok összegfüggvénye segítségével:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{2^n}{n!}$ e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$