

## 2. házi feladat, Analízis 3.

1. Melyik körgyűrűben konvergens a

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^{|n|}(1+|n|)}?$$

És ha  $2^{|n|}$  helyett  $2^n$ -t írunk.

2. Legyen  $p(z)$  adott polinom, bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|\leq R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz$$

kifejezés megegyezik  $p(z)$  gyökeinek számával az origó középpontú  $R$  sugarú körlapon!

3. Fejtsük Laurent-sorba az adott szinguláris pontok körüli valamely gyűrűtartományon az alábbi függvényeket és határozzuk meg minden egyes sor konvergenciatartományát!

a)  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \quad z_0 = 1$

b)  $f(z) = (z-3) \sin \frac{1}{z+2}, \quad z_0 = -2$

c)  $f(z) = \frac{z-\sin z}{z^3}, \quad z_0 = 0$

d)  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2}, \quad z_0 = 3$

4. Írjuk fel az  $\frac{1}{z^2+2z}$  mindkét 0 körüli Laurent-sorát. Ennek segítségével számoljuk ki az alábbi integrálokat!

a)  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2z}$

b)  $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+2z}$

5. Határozzuk meg az alábbi függvények végesben lévő izolált szinguláris helyeit és azok jellegét!

a)  $f(z) = \frac{z^3+1}{z^4-1}$

b)  $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}$

c)  $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(1-e^z)}$

d)  $f(z) = \frac{1}{e^z-1}$

**Beadási határidő: október 14.**