3. házi feladat, Analízis 3.

1) Adjunk példát háromelemű, nem teljes és nem is σ-véges mértéktérre!

2) Jelölje $\#A$ az A halmaz elemszámát, és legyen

$$\mathcal{H} = \left\{ A \subset \mathbb{N} : D(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#(A \cap \{1, \dots, n\})}{n} \text{ létezik} \right\}.$$

a) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{H}$ tartalmazza az üres halmazt és a $\mathbb{N}$ alaphalmazt, zárt a komplementerképzésre, és a véges diszjunkt unióra nézve, de nem zárt a megszámlálható diszjunkt unióra és a véges nemdiszjunkt unióra nézve.

b) Mutassuk meg, hogy D végesen additív, de nem σ-additív $\mathcal{H}$-n!

3) Ha $H \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz, akkor legyen $\mu(H)$ a H-ban lévő racionális számok száma! (Tehát $\mu(H) = +\infty$, ha H-ban végtelen sok racionális szám van.) Igaz-e, hogy μ σ-véges mérték?

4) Adj meg pozitív mértékű, sss (sehol sem sűrű) halmazt! (Segítség: Elég egy olyan zárt halmazt keresni, amely nem tartalmaz valódi intervallumot.)

5) a) Legyen μ külső mérték az X halmazon és $F : X \to Y$ egy leképezés. Igazoljuk, hogy $A \mapsto \mu(F^{-1}(A))$ külső mérték az Y halmazon.

b) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, és tegyük fel, hogy $f(x) \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $1/f$ Borel-mérhető.

Beadási határidő: november 25.