

4. Házi feladat, Analízis 3.

- 1) Jellemezd a $[0, 1]$ Jordan-mérhető részhalmazait!
- 2) Legyen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények sorozat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi halmazok benne vannak az \mathbb{R} -en nyílt halmazok által generált σ -algebrában:
 - a) $\{x \in \mathbb{R} : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ korlátos}\}$
 - b) $\{x \in \mathbb{R} : \exists f_{n_k} \text{ részsorozat amelyre } \lim_{n_k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = +\infty\}$
- 3) Adjunk példát olyan függvénysorozatra, amelyre a Fatou-lemmában éles egyenlőtlenség teljesül! Lehet-e a függvénysorozat egyenletesen konvergens? Lehet-e a függvénysorozat korlátos, ha a mértéktér véges?
- 4) Mutassuk meg, hogy a Beppo-Levi tétel nem igaz monoton csökkenő függvénysorozatra.
- 5) Számítsuk ki a Fubini-tételben szereplő integrálokat $[0, 1] \times [0, 1]$ -en, ha

$$f(x, y) = (x - y)/(x^2 + y^2)^{3/2}$$

Beadási határidő: december 9.