1) Konvergensek-e a következő sorok?

a) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$; b) $\sum \frac{3^n n!}{n^n}$; c) $\sum \frac{e^n n!}{n^n}$;

2) Bizonyítsd be, hogy

a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$ tetszőleges;

b) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, ahol $0 < a < b$.

3) Legyen $\mathrm{f}(x) = e^{x^3}$!

a) $\mathrm{f}^{(99)}(0) =$? b) $\mathrm{f}^{(100)}(0) =$?

4) Becsüld Taylor polinommal!

a) $\sin 18°$ b) $1,02^{100,01}$

5) Hol a hiba? Ha $\mathrm{f} :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenciálható, és $a < x_0 < b$, akkor

$$\mathrm{f}'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}'(x) - 0}{1 - 0} = \lim_{x \to x_0} \mathrm{f}'(x),$$

azaz f' folytonos x_0-ban, és mivel x_0 tetszőleges, ezért f folytonosan differenciálható.

6) Adj meg olyan $\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt,

a) ami differenciálható, de nem folytonosan differenciálható!

b) aminek MacLaurin-sora konvergens, de összegfüggvénye nem f!

7) Feltételes szélsőértékszámítás.

a) Keressük az $\mathrm{f}(x, y) = 2x - 3y$ függvény maximumát az $x^2 + y^2 \le 1$, és $x + y \ge 0$ feltételek mellett.

b) Keressük az $\mathrm{f}(x, y, z) = 2x - 3y - z$ függvény maximumát az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z^2 \le x^2 + y^2$ és $x + y \ge 0$ feltételek mellett.

8) Vizsgáld a következő függvényeket az origóban! Parciális, iránymenti, Gâteaux, Fréchet deriválhatóság?

a) $|xy|$;

b) $\mathrm{f}(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, ha $(x, y) \ne (0, 0)$, és $\mathrm{f}(0, 0) = 0$;

c) $\mathrm{f}(x, y) = 1$, ha $y = x^2 \ne 0$, és $\mathrm{f}(x, y) = 0$ máskor.

9) Számold ki a következő határértékeket!

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$; b) $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{cth} x$;

10) Legyen $\mathrm{g}(x, y) = (2ye^{2x}, xe^y)$ és $\mathrm{f}(x, y) = (3x - y^2, 2x + y, xy + y^3)$! Mutasd meg, hogy létezik a $(0, 1)$-nek olyan környezete, melyet g kölcsönösen egyértelműen képez le. Határozd meg $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g}^{-1})'(2, 0)$-t!

11) Mutasd meg, hogy az

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4^2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható x_1, x_2 ill. x_3 függvényében, de nem oldható meg x_4 függvényében.

12) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}\, x = ?$

13) Legyen $a > 0$, és $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq a\}$! Mennyi $\displaystyle\iint_A x^2 + y^2 \,\mathrm{d}(x, y)$?

14) Legyen $A = \{(x, y) \in [0, \pi]^2 : x \leq y\}$! Mennyi $\displaystyle\iint_A \cos(x + y) \,\mathrm{d}(x, y)$?

15) Legyen $a > 0$! Számold ki az $xy = a$, $xy = 2a$ $y = x$ és az $y = 2x$ görbék által határolt, első negyedbeli korlátos síkidom területét!

16) Számold ki az r sugarú gömb térfogatát!

17) Adott egy téglalap, melyet felosztunk (páronként közös belső pont nélküli) kis téglalapok uniójára. Mutassuk meg, hogy ha minden kis téglalapnak van olyan oldala, aminek hossza egész szám, akkor a nagy téglalapnak is van ilyen oldala.

18) Legyen $a, b > 0$, $\mathrm{g} : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{h}[0, 1] \to \mathbb{R}^3$ úgy, hogy $\mathrm{g}(t) = (a \cos t, b \sin t, t/\pi)$, h pedig a g végpontjait összekötő szakasz! Legyen továbbá $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ úgy, hogy $\mathrm{f}_1(x, y, z) = (2xy \cos z, x^2 \cos z, -x^2 y \sin z)$ és $\mathrm{f}_2(x, y, z) = (yz, 0, xy)$!
a) Számold ki az f_1 és f_2 primitív függvényét, ha létezik!

b) Számold ki az $\int_{\mathrm{g}} \mathrm{f}_1$, $\int_{\mathrm{g}} \mathrm{f}_2$, $\int_{\mathrm{h}} \mathrm{f}_1$, $\int_{\mathrm{h}} \mathrm{f}_2$ integrálokat!

19) Számold ki az $\displaystyle\int_\gamma x^2 + yz$ ívhossz szerinti integrált, ahol $\gamma(x, y, z)$ az origót az $(1, 1, 1)$ ponttal összekötő szakasz!