4. gyakorlat, 2009.09.30., Analízis 3.

1) Mutassuk meg, hogy ha L egy zárt görbe, akkor $\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\oint_L d\arg z$ egész.

2) A fenti érték legyen $n(L)$. Mutassuk meg, hogy ha bármilyen távoli pont és az origó összeköthető egy L-et nem metsző görbével, akkor $n(L) = 0$.

3) Mutassuk meg, hogy a sin függvény nem korlátos.

4) Számoljuk ki a konvergencia-sugarát, írjuk fel az összegfüggvényt, és ellenőrizzük, hogy a hatványsor a legnagyobb körlapon előállítja a függvényt, ahol nincs szingularitás.
a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{3^n}$.

5) Írjuk fel a $z_0 = 0$ bázispontú Taylor-sort, adjuk meg a konvergenciasugarat!
a) $f(z) = \log(z - i)$ b) $f(z) = \frac{z}{z^2+z-6}$ c) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^3}}$ d) $f(z) = (\arctan z)^2$

6) A Taylor sor felírása nélkül mondjuk meg, hol állítja elő a függvényt a 0 bázispontú Taylor-sor.
a) $\frac{1}{\cos z}$; b) $\operatorname{th} z$; c) $\ln(2 + z - z^2)$.

7) $\mathrm{f}(z)$ egész, $|\mathrm{f}(z)| \le \alpha + \beta|\ln|z||$ $(z \in \mathbb{C})$. Mutassuk meg, hogy f konstans.

8) $\mathrm{f}(z)$ egész, nem korlátos, $\exists c, K > 0 : |z| > K \implies |\mathrm{f}(z)| > c$. Mutassuk meg, hogy f-nek van zérushelye.

9) Állítsuk elő az
$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$
függvényt
a) a Maclaurin-sorral és adjuk meg ennek konvergenciatartományát,
b) Laurent sorral a $|z| > 1$ tartományon!

10) Állítsuk elő Laurent-sorral az
$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$
függvényt az alábbi gyűrűtartományokban!
a) $|z| < 1$ b) $1 < |z| < 2$ c) $|z| > 2$ d) $|z-1| > 1$ e) $0 < |z-2| < 1$