5. gyakorlat, 2009.10.07., Analízis 3.

1) Állítsuk elő az
$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$
függvényt
 a) a Maclaurin-sorral és adjuk meg ennek konvergenciatartományát,
 b) Laurent sorral a $|z| > 1$ tartományon!

2) Állítsuk elő Laurent-sorral az
$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$
függvényt az alábbi gyűrűtartományokban!
 a) $|z| < 1$ b) $1 < |z| < 2$ c) $|z| > 2$ d) $|z-1| > 1$ e) $0 < |z-2| < 1$

3) Hányszoros gyöke van a 0-ban?
 a) $1 - \cos z$; b) $\dfrac{z - \sin z}{z}$; c) $\dfrac{e^{iz^2} - 1}{z}$.

4) Adjuk meg az összes olyan $D(0,1)$-en reguláris f(z) függvényt, melyre f$(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$, ha $n \in \mathbb{N}$.

5) Legyen T egy korlátos tartomány, u_1 és u_2 harmonikus T-n, folytonos $\overline{T}$-n. Mutassuk meg, hogy ha $u_1 \leq u_2$ a T határán, akkor a T belsejében is.

6) Állítsuk elő Laurent-sorral az
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$
függvényt a $z_0 = 0$ reguláris pont körüli összes lehetséges gyűrűtartományban!

7) Határozzuk meg - polinommal, ill. végtelen sorral való osztás felosztás segítségével - az alábbi függvények $z_0 = 0$ környezetében érvényes Laurent-sorának néhány első tagját!
 a) $f(z) = \frac{1}{shz}$ b) $f(z) = \frac{1}{\log(1+z)}$ c) $f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$ d) $f(z) = \frac{1}{e^z-1}$

8) Határozzuk meg az
$$f(z) = \frac{1}{z^2 shz}$$
függvény $0 < |z| < \pi$ tartománybeli Laurent-sorának néhány első tagját! A sorfejtés felhasználásával igazoljuk, hogy
$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 shz} = -\frac{1}{3}\pi i$$

9) Számoljuk ki az alábbi integrálokat!
 a) $\int\limits_{|z|=2} z e^{-\frac{1}{z^2}} dz$ b) $\int\limits_{|z|=2} z^{19} e^{-\frac{1}{z^2}} dz$ c) $\int\limits_{|z|=2} z^{-19} e^{-\frac{1}{z^2}} dz$

10) Határozzuk meg az alábbi függvények adott pontbeli szingularitásának jellegét!
 a) $f(z) = \frac{z - shz}{z^3}$, $z_0 = 0$ b) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$
 c) $f(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}$, $z_0 = -2$ d) $f(z) = ctg\frac{1}{z} - \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$

11) Határozzuk meg Laurent-sorfejtéssel az alábbi függvények $z = 0$ pontbeli szingularitásának jellegét!
 a) $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ b) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}$ c) $f(z) = \frac{1}{z}ch\frac{1}{z}$ d) $f(z) = ze^{\frac{1}{z^2}}$