8. gyakorlat, 2009.10.28., Analízis 3.

1) Írjuk fel egy 3 elemű halmazon megadható összes σ-algebrát!

2) Legfeljebb hány elemű egy 10 halmaz által generált σ-algebra?

3) Bizonyítsuk be, hogy minden σ-algebrán a halmazok elemszáma mérték!

4) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ valószínűségi mérték ($\mu(X) = 1$)! Mutassuk meg, hogy ha az $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ halmazok minden X-beli pontot legalább k-szor lefednek, akkor $\mu(A_i) \geq \dfrac{k}{n}$ valamely i-re!

5) Legyen $\sim$ reláció $\mathcal{A}$-n, úgy, hogy $A \sim B$, ha $\mu(A \circ B) = 0$, ahol $A \circ B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Mutassuk meg, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció, és az ekvivalencia-osztályok a $d(\bar{A}, \bar{B}) = \mu(A \circ B)$ távolsággal (teljes) metrikus tér!

6) Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérben külső és belső mérték

$$\mu^*(B) = \inf\{\mu(A) : B \subset A, A \in \mathcal{A}\}$$

$$\mu_*(B) = \sup\{\mu(A) : A \subset B, A \in \mathcal{A}\}.$$

Mutassuk meg, hogy

a) $B \in \mathcal{A} \implies \mu^*(B) = \mu_*(B) = \mu(B)$;

b) $B_1 \subset B_2 \subset X \implies \mu_*(B_1) \leq \mu_*(B_2), \mu^*(B_1) \leq \mu^*(B_2)$;

c) $B \subset X \implies \mu_*(B) \leq \mu^*(B)$;

d) $\mu_*\left(\bigcup B_n\right) \geq \sum \mu_*(B_n)$, ha a B_n-ek diszjunktak;

e) $\mu^*\left(\bigcup B_n\right) \leq \sum \mu^*(B_n)$.

7) Mutassuk meg, hogy nincs megszámlálhatóan végtelen σ-algebra.