9. gyakorlat, 2009.11.04., Analízis 3.

1) a) $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in X : x \in A_n \ \infty \text{ sok } n\text{-re}\}$

b) $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in X : x \in A_n \text{ véges sok } n \text{ kivételével}\}$

c) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ (ha $=$, akkor $\exists \lim$)

d) $\limsup A_n, \liminf A_n \in \mathcal{A}$

e) $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$

f) $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$

g) $\chi_{\limsup A_n} = \limsup \chi_{A_n}$

h) $\chi_{\liminf A_n} = \liminf \chi_{A_n}$

i) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$

j) Ha $\exists n \in \mathbb{N}$, amire $\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) < \infty$, akkor $\mu(\limsup A_n) \geq \limsup \mu(A_n)$

k) Ha $\exists n \in \mathbb{N}$, amire $\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) < \infty$, akkor $\mu(\lim A_n) \geq \lim \mu(A_n)$

2) $A \subset \mathbb{R}$ nullmértékű, ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists (I_n)$ intervallumsorozat, amire $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, és $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon$.

a) $\lambda(A) = 0$ és $B \subset A \implies \lambda(B) = 0$

b) Nullmértékű halmazok sorozatának uniója is nullmértékű.

3) Egy korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha egy fullmértékű halmazon folytonos.

4) μ^* külső mérték, ha $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^* \geq 0$ és σ-szubadditív

a) $\mu_x^*(A) = 1$, ha $x \in A$, 0, ha $x \notin A$.

b) $\mu^*(A) = 1$

c) $\mu^*(\{1\}) = \mu^*(\{2\}) = 10$, $\mu^*(\{1, 2\}) = 1$

d) $X = \mathbb{N}$, $\mu^*(A) = \limsup \dfrac{\text{card}(A \cap \{1, \ldots, n\})}{n}$