10. gyakorlat, 2009.11.11., Analízis 3.

1) Legyen $I = [-1, 1]$, és legyen $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Q}$, egy ekvivalenciareláció I-n. Minden ekvivalencia osztályból kiválasztva egy elemet kapjuk A-t. Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz nem mérhető!

2) Melyik erősebb?
   a) f majdnem mindenütt folytonos;
   b) f majdnem mindenütt megegyezik egy folytonos függvénnyel.

3) μ_1^* és μ_2^* külső mérték X-en. Külső mérték-e $\max(\mu_1^*, \mu_2^*)$ és $\min(\mu_1^*, \mu_2^*)$?

4) Legyen $\mu^*(\emptyset) = 0$ és $\mu^*(A) = 1$, ha $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ külső mérték. (A $\nu : \mathcal{P}(X) \to \{1\}$-hez tartozó külső mérték.) Mik a mérhető halmazok?

5) Igazolja, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton, akkor Borel-mérhető

6) Mérhető-e Borel illetve Lebesgue értelemben az

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 1/q, \text{ ha } x = p/q, \text{ ahol } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \mathrm{lnko}(p, q) = 1; \\ 0, \text{ ha } x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

Riemann-féle függvény?