11. gyakorlat, 2009.11.25., Analízis 3.

1) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $t \in \mathbb{R}$ esetén $g(t)$ az $f(x) = t$ egyenlet gyökeinek száma. Mutassuk meg, hogy g mérhető.

2) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy véges mértéktér és $f, f_n, g, g_n : X \to \mathbb{R}$ függvények. Igazoljuk, hogy ha $f_n \to f$ és $g_n \to g$ mértékben, akkor $f_n + g_n \to f + g$ mértékben.

3) Számoljuk ki az alábbi integrálokat:
a) $\int\limits_0^\infty (x^2 + 3x) d(\frac{\delta_0+\delta_1}{2})$ b) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1} d(\lambda + \delta_0)$ c) $\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{1}{x^2} d\mu_{\mathbb{Z}}$

4) Legyen $(X, \mathcal{A})$ mértéktér, $\mu(X) = 1$. Tegyük fel, hogy $f : X \to \mathbb{R}$ és $0 \leq f \leq K$. Továbbá legyen

$$\int\limits_X f d\mu = m$$

Bízonyítsuk be, hogy ekkor:

$$\int\limits_X (f - m)^2 d\mu \leq \frac{K^2}{4}$$

5) Mennyi az alábbi integrál értéke?

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n e^{-2x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n d\lambda(x)$$

6) Legyen λ a Lebesgue-mérték, μ pedig a számláló-mérték $[0, 1]$-en. Mutassuk meg, hogy a $\delta(x, y)$ Kronecker-delta függvény $\mu \otimes \lambda$ mérhető, és határozzuk meg a Fubini-tételben szereplő integrálokat. Miért nem mond ellent az eredmény a Fubini-tételnek?

7) $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, melyre

$$\left| \int\limits_X f(x) d\mu(x) \right| = \int\limits_X |f(x)| d\mu(x).$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f \geq 0$ μ-majdnem mindenütt, vagy $f \leq 0$ μ-majdnem mindenütt.