12. gyakorlat, 2009.12.02., Analízis 3.

1) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ korlátos mérhető függvény. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor integrálható ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 2^{-n}\}) < \infty$$

2) Legyen

$$x + 2, \text{ ha } x \leq -1, \tag{1}$$
$$g(x) = 2, \text{ ha } -1 < x < 0, \text{ és} \tag{2}$$
$$x^2 + 3, \text{ ha } x \geq 0 \tag{3}$$

Számítsuk, ki az alábbi Lebesgue-Stieltjes integrálokat:
a) $\int_{-2}^{2} x d\lambda_g(x)$?
b) $\int_{-2}^{2} x^2 d\lambda_g(x)$?
c) $\int_{-2}^{2} x^3 + 1 d\lambda_g(x)$?

3) Legyen

$$f(x) = x \text{ ha } x < 0, \text{ és } x + 2 \text{ ha } x \geq 0$$

Igaz-e, hogy
a) $\mu_f << \lambda$?
b) $\mu_f << \mu_Z$?
c) $\mu_f << \lambda + \mu_Z$?
Ha abszolút folytonos,adjuk meg a Radon-Nykodin deriváltját!

4) $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $\mu(A) := \lambda(A \cap B)$. Ekkor $\mu << \lambda$? Ha igen, mi a Radon-Nykodin derivált?

5) Bizonyítsuk be, hogy a $(0, \infty)$ intervallumon

$$x \to \log \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

függvény konvex! (Hölder)