2. gyakorlat, 2009.09.16., Analízis 3.

1. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények sehol sem differenciálhatóak
   a) $f(z) = z - \overline{z}$ b) $f(z) = 2x + xyi$ c) $f(z) = e^x(\cos y - isiny)$

2. Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z) = z\overline{z}$ függvény?

3. Igazoljuk, hogy $w = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-x+yi}$ differenciálható függénye $z = x + yi$! Mennyi a z szerinti derivált?

4. Bizonyítsd be, hogy
   a) $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ b) a sinusz-függvény nem korlátos!

5. Igazoljuk, hogy
   $$|e^{-2z}| < 1 \text{ akkor és csak akkor, ha } \mathrm{Re}z > 0.$$

6. Az origóból kiinduló félegyenesek mentén tartva a végtelenhez melyik irányban létezik $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$?

7. Határozzuk meg az alábbi kifejezések főértékeit:
   a) $\log(-4)$ b) $\log(3i)$ c) $\log(1-i)$ d) $\log(i^{-1/2})$

8. Határozzuk meg az alábbi összefüggések összes gyökét:
   a) $e^z = -2$ b) $e^{3z} = 1$ c) $\log z = \frac{1}{2}\pi i$ d) $\log\sqrt{2+z^2} = \pi i$

9. Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket:
   a) $\sin 2i$ b) $\cos i$ c) $\tan 1 - i$

10. Igazoljuk, hogy a tangens függvény sehol sem veszi fel a $-i, i$ értékeket!

11. Határozzuk meg az alábbi értékeket:
    a) 1^i b) 2^i c) i^i

12. Határozzuk meg az
    $$\int_L (z^2 - 1)dz$$
    integrál értékét, ha az L görbe a (0,1) és az (1,0) pontot összekötő
    a) egyenes szakasz b) $y = 1 - x^2$ parabolaív

13. Számítsuk ki az
    $$\int_{z=0}^{1+i} (y - x - 3x^2 i)dz$$
    integrál értékét.
    a) 0-ból $1 + i$-be irányított egyenes szakasz mentén
    b) 0-ból i-be, majd i-ből $1 + i$-be irányított töröttvonal mentén

14. Számítsuk ki az

$$\int_{z=-i}^{i} |z| dz$$

integrál értékét az alábbi integrációs utak esetén:

a) 0-ból $-i$-ből i-be irányított egyenes szakasz mentén

b) 0-ból $-i$-t i-vel összekötő félkörív mentén.

15. Számítsd ki az $f(z) = \mathrm{Re} z$ függvény vonalintegrálját 1-től i-ig

a) az egyenesszakasz mentén

b) a 0 középpontú negyedkörív mentén.

16. Integráld az $f(z) = z^2$ függvényt

a) $\gamma_1(t) = t + 2it,\ t \in [0, 2]$ mentén

b) $\gamma_2(t) = t + it^2,\ t \in [0, 2]$ mentén.

17. Írjuk fel a Cauchy-Riemann egyenleteknek megfelelő differenciálegyenleteket polárkoordináták segítségével! Ennek segítségével lássuk be, hogy egy $f(r, \varphi)$ reguláris függvény valós része harmonikus, azaz

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 0$$