

3. gyakorlat, 2009.09.23., Analízis 3.

1. Mutassuk meg, hogy egy reguláris komplex függvény valós része harmonikus!
2. Milyen a, b, c esetén lesz harmonikus az alábbi függvény

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

3. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények harmonikusak a komplex számsíkon és határozzuk meg a harmonikus társfüggvényeiket!

a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ b) $u(x, y) = 2y + e^{-x} \cos y$ c) $u(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + x$

4. Mennyi $\int_G z^3 - iz^2 + 5z + 2i dz$, ha G a komplex egységkör?

5. Határozzuk meg az alábbi függvények regularitási tartományát, és mutassuk meg, hogy

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 0$$

a) $f(z) = \frac{z^2}{z-3}$ b) $f(z) = z^2 e^{-z}$ c) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ d) $f(z) = \log(z+2)$

6. Határozzuk meg $\int_G \frac{1}{1+z^2} dz$ értékét, ha G pozitív irányban bejárt

a) $|z-i|=1$ b) $|z+i|=1$ c) $|z|=2$

7. Határozzuk meg az alábbi integrálok értékét, ha az integrációs út a kezdő és végpontot összekötő tetszőleges szakaszonként sima görbe!

a) $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$ b) $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz$ c) $\int_1^3 (z-2)^3 dz$

8. Igazoljuk, hogy az origón át nem menő, tetszőleges rektifikálható görbe mentén integrálva:

$$\int_1^e \frac{dz}{z} = 1 + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

9. Mennyi

$$\int_{|z|=3} \frac{3z}{z^2 + iz + 2} dz$$

10. Határozzuk meg a Cauchy-integrálformula segítségével az

$$\int_G \frac{dz}{z^2 + 9}$$

integrál értékét, ha

- a) $z = 3i$ G belső pontja, $z = -3i$ G külső pontja
- b) $z = -3i$ G belső pontja, $z = 3i$ G külső pontja
- c) $z = 3i$ és $z = -3i$ G belső pontja

11. Számoljuk ki az alábbi integrálok értékét:

a) $\int_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{z-\pi/6} dz$ b) $\int_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{(z-\pi/6)^3} dz$ c) $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4} dz$ d) $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$