Funkcionálanalízis 1. heti gyakorlat

(1) Legyen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Mikor lesz az

$$A = \sum_{i=0}^{3} a_i \sigma_i$$

mátrix önadjungált?

c) Mikor lesz a

$$B = \sum_{i=0}^{3} b_i \sigma_i$$

mátrix pozitív szemidefinit?

(2) Adjuk meg az origóra való tükrözés mátrixát, az x tengelyre való tükrözés mátrixát, illetve az xy síkra való tükrözés mátrixát $\mathbb{R}^n$ standard bázisában!

(3) Adjuk meg $\mathbb{R}^3$-ban az xy síkra való $(1,1,1)$ vektorral párhuzamos vetítés mátrixát $\mathbb{R}^3$ standard bázisában, illetve az $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (1,1,0)$, $f_3 = (1,1,1)$ bázisban. Mi a bázisátmenet mátrixa?

(4) Van-e olyan $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ leképezés melynek mátrixa 2 különböző bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}?$$

(5) Bizonyítsuk be a definíció alapján, hogy egy pozitív szemidefinit mátrix sajátértékei és diagonális elemei nemnegatívak.

(6) Legyenek az alábbi C mátrix sajátértékei λ_1, λ_2 és λ_3.

$$C = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 11 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Számoljuk ki $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$-t, $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$-t, és $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$-t!

(7) Legyen $A := \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$. Adjuk meg A spektrálfelbontását. Számoljuk ki az A^{2010} operátort.

(8) Milyen transzformációt ad meg az $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix? A karaketerisztikus polinom meghatározása nélkül számoljuk ki a mátrix sajátértékeit.

(9) Igazoljuk, hogy az $O = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ egy forgatás mátrixa. Mekkora a forgatás szöge?