# Funkcionálanalízis 2. heti gyakorlat

(1) Tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén definiáljuk az $|\mathbf{a}\rangle\langle\mathbf{b}|$ **diád operátort** a $|\mathbf{a}\rangle\langle\mathbf{b}|\mathbf{v} := \langle\mathbf{b}, \mathbf{v}\rangle\, \mathbf{a}$ formulával.

a) Írjuk fel egy általános diád mátrixát $R^3$ standard bázisában!

b) Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=1}^{n} |\mathbf{v}_k\rangle\langle\hat{\mathbf{v}}_k| = I$, ahol $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ az $R^n$ tér egy tetszőleges bázisa.

c) Legyen $X_1 := \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ és $X_2 := \operatorname{span}\{\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, ahol $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ az $R^n$ tér egy tetszőleges bázisa. Fejezzük ki az $X_1$ altérre való, $X_2$-vel párhuzamos vetítés ill. tükrözés operátorát diádok segítségével!

(2) Legyen $v_1, v_2, v_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$v_1(x) := 1 + x^2, \qquad v_2(x) := 1 + x + x^2, \qquad v_3(x) := 1 - x^2$$

*a)* Igazoljuk, hogy $\{v_1, v_2, v_3\}$ bázis a $[0, 1]$ intervallumon legfeljebb másodfokú polinomok terében.

*b)* Legyen $X_1$ a $v_2$ és $X_2$ a $v_1$ és $v_3$ polinomok által kifeszített altér. Írjuk fel az $X_2$ altérre való, $X_1$ altérrel párhuzamos vetítés és tükrözés mátrixát a

$$q_1(x) := 1; \qquad q_2(x) := x; \qquad q_3(x) := x^2$$

bázisban!

(3) Az $n \times n$ valós illetve komplex elemű mátrixok valós illetve komplex számtest feletti vektorterében alteret alkotnak-e

a) a diagonális mátrixok;

b) a felső háromszög mátrixok;

c) a pozitív definit mátrixok;

d) az egységnyomú mátrixok;

e) a szimmetrikus mátrixok

f) az önadjungált mátrixok;

g) egy adott $A$ mátrixszal felcserélhető mátrixok?

Alterek esetén adjuk meg az altér dimenzióját is!

(4) Igazoljuk, hogy a $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ leképezésre pontosan akkor teljesül, hogy létezik olyan $X \subset C^n$ altér, hogy minden $x \in \mathbb{C}^n$ esetén ha $x = x_1 + x_2$, $(x_1 \in X, x_2 \perp X)$, akkor $Px = x_1$, ha $P = P^* = P^2$. Mi a helyzet, ha csak $P^2 = P$ teljesül?

(5) a) Igazoljuk, hogy a

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr} A^* B, \qquad A, B \in M_n(\mathbb{C})$$

belső szorzatot definiál az $M_n(\mathbb{C})$ téren.

b) Igazoljuk, hogy a

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli mátrixok alkalmas normálással ortonormált bázist alkotnak a $2 \times 2$-es 0 nyomú mátrixok terében. Egészítsuk ki ezt a rendszert $M_2(\mathbb{C})$ ortonormált bázisává.

(6) Adjuk meg $M_3$ egy ortonormált bázisát!

(7) Mi a 0 nyomú mátrixok ortogonális komplementere?