Funkcionálanalízis 3. heti gyakorlat

(1) Legyen V az egy irányban végtelen, véges sok nem nulla elemet tartalmazó számsorozatok vektortere.

a) Adjuk meg a V standard bázisához tartozó duális rendszert, mutassuk meg róla, hogy lineárisan független rendszer, de nem feszíti ki a teljes duális teret! Adjuk meg V duálisát!

b) Legyen V az egy irányban végtelen, véges sok nem nulla elemet tartalmazó számsorozatok vektortere. Mutassunk olyan V^{**}-beli elemet, amely nincs benne nincs benne az $\iota(V)$ halmazban.

(2) Legyen L vektortér.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\otimes^2 L = \wedge^2 L \dot{+} \vee^2 L$!

(b) Igaz-e, hogy $\otimes^3 L = \wedge^3 L \dot{+} \vee^3 L$?

(3) Legyen V n-dimenziós lineáris tér, és jelölje

$$\Lambda := \mathbb{C} \oplus V \oplus \wedge^2 V \oplus \wedge^3 V + \cdots + \oplus \wedge^n V$$

Számítsuk ki Λ dimenzióját!

(4) Igaz-e, hogy pozitív szemidefinit mátrixok tenzorszorzata is pozitív szemidefinit?

(5) Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ és $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ az $A \in M_n(\mathbb{C})$ illetve $B \in M_n(\mathbb{C})$ mátrix multiplicitással vett sajátértekei. Adjuk meg az $A \otimes B$ operátor sajátértékeit.

(6) Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a $\mathbb{C}^n$ tér standard bázisa. Számoljuk ki az $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$ és $e_1 \vee e_2 \vee \cdots \vee e_n$ vektorok hosszát(normáját)!

(7) Mutassuk meg, hogy $|00\rangle + |11\rangle, |01\rangle + |10\rangle, |00\rangle - |11\rangle, |01\rangle + |10\rangle$ ortogonális bázis $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$-ben! Hogyan normálhatnánk?