Funkcionálanalízis 4. heti gyakorlat

(1) Legyen p_1 és p_2 norma az X lineáris téren. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $p_1 + p_2$ és $\max(p_1, p_2)$ is norma!

(2) Tekintsük a $\|.\|_p$ normákat $\mathbb{C}^n$-en ($1 \leq p \leq \infty$).

(a) Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$!

(b) Keressünk $1 \leq p, r \leq \infty$ esetén c_1 és c_2 pozitív valós számokat, melyekre minden $x \in \mathbb{C}^n$ esetén

$$\|x\|_p \leq c_1\|x\|_r \leq c_2\|x\|_p$$

(3) Igazoljuk, hogy $f, g \in L^1$ és $t \in [0, 1]$ esetén $|f|^t\,|g|^{1-t} \in L^1$ és

$$\int |f|^t\,|g|^{1-t} \leq \left(\int |f|\right)^t \left(\int |g|\right)^{1-t}.$$

(4) Konvergens-e a $C[0, 1]$ téren, illetve az $L^2[0, 1]$ téren a következő sorozat?

$$x_n(t) = t^n, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(5) Nyílt-e $C[0, 1]$ térben rögzített $t \in [0, 1]$ esetén az $\{f : |f(t)| < 1\}$ halmaz?

(6) Igazoljuk, hogy $p < q$ esetén $l^p \subset l^q$, és $l^p \neq l^q$.

(7) Bizonyítsuk be, hogy $p < \infty$ esetén l^p-ben sűrűn vannak azok a sorozatok, amelyeknek csak véges sok elemük nem 0. Igaz ez az l^∞ térre?

(8) Igazoljuk, hogy normált tér egységgömbje (és így bármely középpontú és sugarú gömbje is) konvex halmaz!

(9) *a)* Vázoljuk $\mathbb{R}^2$-en a különböző p-normák egységgömbjeit, vagyis a $B_p := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^p + |x_2|^p \leq 1\}$ halmazokat, ahol $1 \leq p \leq \infty$.

b) Definiáljuk B_p-t a fenti módon $0 < p < 1$ esetén is! Konvexek lesznek-e ezek a halmazok?

c) Normát határoz-e meg $\mathbb{R}^2$-en $p(x) := (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$ ha $p < 1$?