# Funkcionálanalízis 5. heti gyakorlat

(1) Vizsgáljuk a folytonosságot, illetve határozzuk meg a normát:

(a) $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = t^2 x(t)$;

(b) $A : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$, $Ax(t) = t^2 x(t)$

(c) $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t^2)$;

(d) $A : C^2[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t)$;

(e) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$, $A$ pedig a deriválás operátor.

(2) Legyen $g \in C[a,b]$, és $\mathcal{G} : C[a,b] \to \mathbb{C}$,

$$\mathcal{G}(f) := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Mennyi a $\mathcal{G}$ funkcionál normája?

(3) Legyen $\varphi : l^4 \to \mathbb{C}$ a következőképpen definiálva

$$\varphi(a_1, a_2, \dots) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{\sqrt{n^3}}.$$

Határozza meg $\varphi$ normáját!

(4) Igazoljuk, hogy a $h : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $h(X) \to \sin X$ operátor Frechet-deriváltja az $X = I$ pontban a $H \mapsto (\cos X)H$. Igaz-e ez az $M_n(\mathbb{C})$ tér minden pontjában?

(5) Legyen $X$ Banach-tér, és

$$f : \mathcal{B}(X)^{-1} \to \mathcal{B}(X)^{-1}; \qquad f(A) := (A^2)^{-1}.$$

Számoljuk ki $f$ deriváltját.

(6) Számoljuk ki az $f(X) := X \vee X \vee B$ leképezés Frechet-deriváltját, ha $X$ és $B$ $n \times n$-es mátrixok, és $B$ rögzített!