Funkcionálanalízis 6. heti gyakorlat

(1) Melyik határoz meg folytonos lineáris funkcionált az $L^3(\mathbb{R})$ téren az alábbiak közül

$$\varphi_1(f) := \int_0^1 e^{x^3} f(x)dx, \qquad \varphi_2(x) = \int_1^\infty e^{x^3} f(x)dx?$$

(2) Igaz-e, hogy egy X Banach-térben minden $A \in B(X)$-re $\exp(iA) = \cos A + i \sin A$, illetve $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$?

(3) Mutassuk meg, hogy a korlátos, folytonos függvények sup-normával értelmezett $C_b(\mathbb{R})$ terén tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén a

$$(T_t f)(x) = f(x+t)$$

operátor lineáris és folytonos. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{T^n}{(2n+1)!}$$

folytonos lineáris operátort értelmez.

(4) Legyen X Banach tér, és legyenek Y és Z olyan zárt alterek, amelyekre $X = Y \dot{+} Z$. Bizonyítsuk be, hogy a Pr_Y projekció folytonos.

(5) Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan 1 normájú $\varphi : l^\infty \to \mathbb{C}$ leképezés, ami a konvergens sorozatokhoz a határértéküket, az $(a_n) := ((-1)^n)$ sorozathoz pedig az α számot rendeli?

(6) Milyen $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ esetén lesz nyílt a

$$B_z : L^1(\mathbb{R}^+) \to L^1(\mathbb{R}^+), \qquad (B_z f)(x) := e^{izx} f(x)$$

leképezés?