Funkcionálanalízis 7. heti gyakorlat

(1) Igazoljuk, hogy Hilbert-térben

$$\|x\| = \sup\{|\langle y, x\rangle| \,:\, \|y\| = 1\} \qquad \text{és} \qquad \|A\| = \sup\{|\langle y, Ax\rangle| \,:\, \|y\| = \|x\| = 1\}$$

(2) Létezik-e olyan $\langle ., . \rangle$ skalárszorzás az $l^3(\mathbb{R})$ normált téren, mellyel Hilbert-tér lenne, és a skalárszorzásból származtatott norma megegyezne a $\|.\|_3$ normával?

(3) *a)* Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{H}$ Hilbert-térben létezik egy $\{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ megszámlálható ortonormált rendszer. Igazoljuk, hogy az $x_t := \sum_{n\in\mathbb{N}} t^n\, e_n;\ \ t \in (0,1)$ vektorok lineárisan függetlenek.

b) Igazoljuk, hogy minden végtelen dimenziós Hilbert-tér legalább kontinuum algebrai dimenziós.

c) Számoljuk ki az $\langle x_t, x_s \rangle$ skalárszorzatot.

(4) Mutassuk meg, hogy a $\sin nx$, $n \in \mathbb{N}$ függvények ortogonális rendszert alkotnak $L^2[-\pi, \pi]$-ben! Teljes-e ez a rendszer?

(5) Mi az $L^2(\mathbb{R})$ térben a páros függvények halmazának ortogonális kiegészítője?

(6) Adja meg a véges sok nem-nulla elemet tartalmazó sorozatok alterének ortogonális komplementerét ℓ^2-ben.

(7) Igazoljuk, hogy ha egy Hilbert-térben $x_n \to x$ és $y_n \to y$, akkor $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

(8) Igazoljuk, hogy egy $\mathcal{H}$ Hilbert-térben pontosan akkor létezik megszámlálható sűrű halmaz, ha létezik benne megszámlálható ortonormált bázis.

(9) Igazoljuk, hogy $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < +\infty$-ből nem következik, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sor konvergens, ha az x_n-ek nem ortogonálisak.

(10) Milyen a, b, c számokra lesz az

$$\int_{-1}^{1} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 \,\mathrm{d}x$$

integrál minimális?