Funkcionálanalízis 8. heti gyakorlat

(1) Legyen φ egy lineáris funkcionál a mátrixok terén. Igazoljuk, hogy egyértelműen létezik egy olyan D mátrix, amelyre $\varphi(A) = \operatorname{Tr} DA$.

(2) Alkalmazzuk a Gram-Schmidt féle ortogonalizációs eljárást az $L^2[-1,1]$ t'er $1, x, x^2, x^3$ polinomjaira.

(3) Tekintsük az $M_n(\mathbb{C})$ teret az

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{Tr} A^*B$$

skaláris szorzattal. Legyen $C_1, C_2 \in M_n(\mathbb{C})$, és adjuk meg az

$$A \mapsto C_1AC_2$$

operátor adjungáltját.

(4) Adjuk meg az alábbi $L^2[0,1]$-en értelmezett operátorok adjungáltjait!

$$(A_1x)(t) = \int_0^t x(\tau)\ \mathrm{d}\tau, \qquad (A_2x)(t) = tx(t), \qquad (A_3x)(t) = \int_0^1 tx(\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

(5) Mi lesz a következő l^2téren értelmezett operátorok adjungáltja

(a) $A_1 : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$;

(b) $A_2 : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (a_1x_1, a_2x_2, \dots)$;

(c) $A_3 : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$;

(d) $A_4 : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$;

(e) $A_5 : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (a_1x_2, a_1x_3, \dots)$;

(f) $A_6 : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, a_1x_1, a_2x_2, \dots)$?

(6) Legyen M_f az $L^2([0,1] \times [0,1]) = L^2([0,1]) \otimes L^2([0,1])$ Hilbert téren az $f(x,y) = 2x - y^4 - 1 - 4xy^2 + 2xy^4 + 2y^2$ függvénnyel való szorzás operátora. Felírható-e M_f egy $C \otimes D$ alakban? Mennyi $\|M_f\|$?

(7) Milyen $a_1, a_2, \dots$ sorozat esetén lesz az l^2 téren értelmezett

$$A : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (a_1x_1, a_2x_2, \dots)$$

operátor önadjungált, normális, projekció, illetve unitér?

(8) Legyen A önadjungált operátor egy $\mathcal{H}$ Hilbert téren, és $z = a + \mathfrak{Im} b$, $b \neq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$(A + zI)(A + \overline{z}I)^{-1}$$

operátor unitér.

(9) Legyen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ az l^2 tér kanonikus bázisa és R a jobbra tolás operátora. Számoljuk ki az $A^*\delta_n$ vektort, ha $A = R^*(3 - R)^{-1}$!

(10) Legyen T olyan normális operátor egy $\mathcal{H}$ Hilbert-téren, amelyre $T^2 = I$. Igaz-e, hogy $(2i + T)^{-1}$ egy korlátos, normális operátort ad?