Funkcionálanalízis 10. heti gyakorlat

(1) Igazoljuk, hogy ha $x_n \to x$ egy $\mathcal{H}$ normált térben, akkor $\|x_n\| \to \|x\|$. És ha $x_n \xrightarrow{w} x$?

(2) Konvergens-e az $A_n : l^2 \to l^2$

$$A_n : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, \dots 0, (-1)^{n+1} x_{n+1}, (-1)^{n+2} x_{n+2}, \dots)$$

operátorsorozat a gyenge, illetve az erős operátortopológiában, valamint az operátornorma által indukált topológiában?

(3) Legyen E_n páronként ortogonális (önadjungált) projekciók sorozata egy $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, $E_n \neq 0$, és $\lambda > 0$ egy valós szám. Milyen λ értékekre lesz az

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n E_n$$

lineáris operátor korlátos? Tegyük fel, hogy A korlátos, mi a spektruma?

(4) Adjuk meg az l^2 téren az

$$A\delta_n = i\delta_n + \delta_{n+1} \qquad\qquad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

operátor adjungáltját és spektrumát! Normális-e az A operátor?

(5) Adjuk meg egy $n \times n$-es Jordan-blokk rezolvensét!

(6) Igazoljuk, hogy ha $A \in B(\mathcal{H})$ önadjungált és unitér, akkor A fölírható 2 projekció különbségeként.

(7) Adjuk meg az $A : L^2[0, 1] \to L^2[0, 1]$,

$$(Af)(x) := \frac{f(x)}{2 - x}$$

operátor spektrumát.