

## Funkcionálanalízis, 1. Házi feladatsor

(1) Legyen  $v_1, v_2, v_3 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$v_1(x) := \cos^2 \frac{x}{2}, \quad v_2(x) := \sin^2 \frac{x}{2}, \quad v_3(x) := \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

a) Igazoljuk, hogy  $\{v_1, v_2, v_3\}$  bázis a  $[0, 2\pi]$  intervallumon legfeljebb elsőfokú trigonometrikus polinomok

$$\mathcal{T}_1 := \{a + b \sin x + c \cos x : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

terében.

b) Legyen  $X_1$  a  $v_2$  és  $X_2$  a  $v_1$  és  $v_3$  polinomok által kifeszített altér. Írjuk fel az  $X_2$  altérre való,  $X_1$  altérrel párhuzamos vetítés mátrixát a

$$q_1(x) := 1; \quad q_2(x) := \sin x; \quad q_3(x) := \cos x$$

bázisban!

(2) a) Legyen

$$A := \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6i \\ 0 & 2 & 0 \\ -6i & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Számoljuk ki a  $\sin A$  mátrixot.

b) Legyen  $e_1, e_2, e_3$  a  $\mathbb{C}^3$  tér standard bázisa. Írjuk fel ebben a bázisban annal a lineáris transzformációnak mátrixát, amelyre  $Ae_1 = e_2$ ,  $Ae_2 = e_3$  és  $Ae_3 = e_1$ , majd adjuk meg a spektrálfelbontását, és az  $\exp A$  illetve  $\cos A$  mátrixokat.

(3) a) Az  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  mátrixok melyike írható fel két vektor tenzorszorzataként? Hogyan?

b) Igazoljuk, hogy, hogy  $u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2$  pontosan akkor elemi tenzor, ha vagy  $u_1$  és  $u_2$ , vagy  $v_1$  és  $v_2$  lineárisan összefüggő!

(4) Legyenek  $A, B : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  lineáris operátorok, a kanonikus bázisban  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

alakúak. Írjuk fel az alábbi leképezések mátrixát:

a)  $A \wedge A$     b)  $A \otimes B$     c)  $A \wedge B$

Írjuk fel a megfelelő kanonikus vektorokból képzett bázist az egyes vektortereken (ezzel legalább biztosan eltaláljuk a leképezések és így a mátrixok dimenzióját).

**Beadási határidő: Március 3.**