Funkcionálanalízis, 2. Házi feladatsor

(1) Legyen X a $[-1,1]$ intervallumon folytonosan differenciálható függvények tere.

a) Legyen
$$\|f\| = |f(1) - f(-1)| + \sup\{|f'(x)| : -1 < x < 1\}.$$
Igaz-e, hogy $\|.\|$ norma az X téren?

b) Mi a helyzet
$$\|f\| = |f(1/2)| + \sup\{|f'(x)| : -1 < x < 1\}.$$
esetén?

(2) *a*) Igazoljuk, hogy az $L^2[0,1]$térben sűrűn vannak azon polinomok, melyek 1/2-ben 0 értéket vesznek fel. Igaz-e ez a $C[0,1]$ térben?

b) Teljes-e a konvergens sorozatok tere a szuprémum normával? Állítását bizonyítsa!

(3) Mi lesz az alábbi képletekkel definiált operátorok normája?

a) $C[0,1]$ téren az
$$Af(x) := \int_0^x f(y)\ \mathrm{d}y$$
.

b) $C[-1,1]$, illetve $L^1[-1,1]$ téren a
$$F(f) := \int_{-1}^1 f(t)t\ \mathrm{d}t$$
.

(4) *a*) Legyen $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Deriváljuk az $(A + tB)^n$ függvényt $t = 0$-ban!

b) Deriváljuk az $f(A + tB)$ függvényt $t = 0$-ban, ha f polinom és $B = AX - XA$!

c) Ennek segítségével lássuk be, hogy ilyen B-re $\exp(A + tB)$ deriváltja $t = 0$-ban:
$$\int_0^1 \exp(uA)B\exp((1-u)A)\ \mathrm{d}u$$
(Segítség: Használjunk parciális integrálást!)

Beadási határidő: Március 17.