Funkcionálanalízis, 3. Házi feladatsor

(1) Jelölje $C^1[0,1]$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett komplex értékű folytonosan differenciálható függvények terét, és $f, g \in C[0,1]$ esetén legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f'(x)} g'(x) \, \mathrm{d}x.$$

(a) Igaz-e, hogy $\langle ., . \rangle$ belső szorzat?

(b) Legyen $\mathcal{F} = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0\}$. Igaz-e, hogy $\langle ., . \rangle$ belső szorzat az $\mathcal{F}$ téren?

(2) Milyen α, β esetén minimális az

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2 x - \alpha \sin 2x - \beta \cos 2x)^2 dx$$

integrál?

(3) Legyen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ az l^2 tér kanonikus bázisa, és $A\delta_n = \delta_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Adjuk meg az A operátor normáját! Konvergál-e A^k az *so* vagy a *wo* topológiában?

(4) Legyen A önadjungált operátor egy $\mathcal{H}$ Hilbert téren, és $z = a + ib$, $b \neq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$(A + zI)(A + \overline{z}I)^{-1}$$

operátor unitér.

(5) Definiáljuk $L^2(\mathbb{R})$-en a T operátort a következő formulával: $(Tf)(x) := f(-x)$.

a) Igazoljuk, hogy T önadjungált unitér operátor.

b) Adjuk meg a $\mathrm{Ker}\,(I - T)$ és $\mathrm{Rng}\,(I - T)$ altereket!

c) Igazoljuk, hogy $\mathrm{Rng}\,(I - T) = \mathrm{Ker}\,(I + T)$ és $\mathrm{Rng}\,(I + T) = \mathrm{Ker}\,(I - T)$.

d) Igazoljuk, hogy $P_1 := \frac{1}{2}(I - T)$ és $P_2 := \frac{1}{2}(I + T)$ ortogonális projekciók, és $I = P_1 + P_2$.

Beadási határidő: Április 14.