Funkcionálanalízis, 4. Házi feladatsor

(1) A $H = L^2([0,1] \times [0,1], \mathbb{C})$ Hilbert-téren tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ számokra értelmezzük az alábbi leképezést.

$$T_{\alpha,\beta} : H \to H \qquad f(x,y) \mapsto \alpha f(x,y) + \beta f(y,x)$$

Milyen α és β számokra lesz $T_{\alpha,\beta}$
a.) önadjungált,
b.) unitér,
c.) projekció?
d.) normális?

(2) Legyen $\delta_1, \delta_2, \dots$ az l^2 tér kanonikus bázisa és R a jobbra tolás operátora. Számoljuk ki az $A^*\delta_n$ vektort, ha $A = R^*(4\,\mathrm{i}\,I - R)^{-1}$!

(3) Legyen $\rho(x) = e^{-x^2}$ súlyfüggvény, és definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra az alábbi függvényt.

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$$

a.) Igazoljuk, hogy a $H_n(x)$ függvény polinom, melynek főegyütthatója $2^n/n!$.
b.) Bizonyítsuk be a H_n polinomok „merőlegességét”.

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) \rho(x)\, dx = \delta_{n,m}$$

(A H_n függvényeket nevezik *Hermite-polinomoknak*.)

(4) Adjuk meg az alábbi $A_i : C[-1,1] \to C[-1,1]$ leképezések spektrumát (osztályozva), és normáját

$$(A_1 f)(x) = (-x^2 + x + 1) f(x), \qquad (A_2 f)(x) = (x + |x|) f(x).$$

(5) Tekintsük a $H = \mathbb{C}^2$ Hilbert-teret a szokásos skaláris szorzással, és legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

lineáris operátor.
a.) Igazoljuk, hogy A normális operátor!
b.) Számoljuk ki A spektrumát!
c.) Adjuk meg A spektrálfelbontását!
d.) Legyen t valós paraméter, és számoljuk ki az $\exp(tA)$ operátort!

Beadási határidő: Május 5.