Házi feladatok

2. óra

- Benne van-e a $(2,-1,3-4)$, $(1,2,1,-1)$ és $(-1,0,1,0)$ vektorok által generált altérben $(-1,5,0,6)$?

  Megoldás: Nincs.

- $e_1=(1,0,1,0)$, $e_2=(0,1,0,1)$, $e_3=(1,2,1,3)$, $e_4=(1,-2,\alpha,3)$ bázis $\mathbb{R}^4$-en, adjuk meg ebben a bázisban (1,0,0,0) koordinátáit!

  Megoldás: A koordinátái: $\left(\frac{5-\alpha}{1-\alpha},\frac{12}{1-\alpha},-\frac{5}{1-\alpha},\frac{1}{1-\alpha}\right)$.

- Bázis-e $\mathbb{R}^3$-ben $e_1=i+3j$, $e_2=-j+k$, $e_3=i+2j-k$? Ha igen adjuk meg $v=i+4j-k$-t az új bázisban.

  Megoldás: Igen, bázist alkot. $v=e_1-e_2$.

3. óra

- $\sum\limits_{i=1}^{100} A^k =?$, ha

  - a.) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$
  - b.) $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$

  Megoldás: a.) Teljes indukcióval: $A^k=2^{k-1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, így $\sum\limits_{i=1}^{100} A^k=(2^{100}-1)\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

  b.) Teljes indukcióval: $A^k=4^{k-1}A$, így $\sum\limits_{i=1}^{100} A^k=\frac{4^{100}-1}{3}\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$

- $A^{100} =?$, ha $A = \begin{bmatrix} a & a & a & -3a-1 \\ a & a & a & -3a-1 \\ a & a & a & -3a-1 \\ a & a & a & -3a-1 \end{bmatrix}$

  Megoldás: Könnyen kiszámolható, hogy: $A^2 = -A$, így $A^k = (-1)^{k+1} \cdot A$, azaz $A^{100} = -A$.

4. óra

- det A=?
  - a.) $A = \begin{bmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x \end{bmatrix}$
  - b.) $A = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{bmatrix}$

  Megoldás: a.) $detA = x^n + n^{\cdot}x^{n-1}$ b.) $detA = 0$

- Legyen A n-edrendű mátrix, melynek elemei +1 vagy -1. Bizonyítsuk be, hogy det A osztható 4-gyel, ha $n \geq 3$!

  Megoldás: Ha az A csak +1-ből áll, akkor det A=0.

  $$detA = \sum_{\pi} (-1)^{\Pi} a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\pi(n)} = \sum_{\pi} c_{\pi}$$

  Mivel $a_{i,j} = \pm 1$, így a tagok a determináns képletében minden prmutációra $c_{\pi} = \pm 1$, hiszen +1-eket és -1-eket szorozgatunk össze. Ha egy $a_{i,j}$-nek megváltoztatjuk az előjelét, akkor azokban a permutációkban amelyikben szerepel, ott c_{π} előjelet vált, azaz az összeg ± 2-vel változik meg. Mivel minden $a_{i,j}$ pontosan $(n-1)!$ darab permutációban szerepel, ami $n \geq 3$ esetén páros sokat jelent. Tehát a determináns megváltozása páros sok ± 2 össszege, amely mindig 4-gyel osztható.

  Mivel tetszőleges mátrix megkapható a csupa +1-ből véges sok cserélgetéssel, és a determináns mindig 4-gyel osztható marad, így a végén is az lesz.

5. óra

- $rang \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} =?$

Megoldás: $det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$, így a rangja 4.

- Mátrixok rangja a,b függvényében?

  - a.) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$
  - b.) $\begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 4 & a & b \\ 3a & b+3 & 0 \end{bmatrix}$

    Megoldás:

    a.) Ha a=b=1, akkor a rangja 1. Ha a+b+1=0, akkor a rangja 2. Egyébként a rangja 3.

    b.) Ha $b = 0$, vagy $b = \frac{3a^2-12}{4-a}$, $\quad a \neq 4$, akkor a rangja 2. Egyébként a rangja 3.

- Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

  - a.)

    $x_1 - 8x_3 + x_4 = 0$
    $2x_1 + x_2 = 3$
    $4x_1 + 7x_2 = -4$
  - b.)

    $x_1 + x_2 - x_3 = 1$
    $2x_1 - x_2 + x_3 = 2$
    $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$
    $4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$
  - c.)

    $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
    $a\ x_1 + b\ x_2 + c\ x_3 = d$
    $a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = d^2$

    Megoldás:

    a.) $x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = \frac{5}{16} + \frac{x_4}{8}$

    b.) $x_1 = 1, \quad x_2 = x_3$

    c.) $x_1 = \frac{(b-d)(c-d)}{(a-b)(a-c)}, \quad x_2 = \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}, \quad x_3 = -\frac{(a-d)(b-d)}{(b-c)(a-c)}$

6. óra

- Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeiré s sajátvektorait!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A sajátértékei: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$.
A sajátvektorai: $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = a \cdot (-1,0,1) + b \cdot (-2,1,0)$.
B sajátértékei: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.
B sajátvektorai: $v_1 = (-2,1,0)$, $v_2 = (-4,0,1)$, $v_3 = (-4,1,0)$.

- Végezzünk főtengelytranszformációt! Számoljuk ki A^{2011}-t!

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$A = UDU^{-1}$, ahol a sajátértékekből álló mátrix: $D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ és a sajátvektorokból álló mátrix: $U = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$A^{2011} = UD^{2011}U^{-1}$

- A sajátértékei $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$.
A sajátvektorai: $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (-1,0,1)$. Írjuk fel A-t!
Megoldás:

A sajátértékekből álló mátrix: $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ és a sajátvektorokból álló mátrix: $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Így $A = UDU^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Lineáris operátor-e?

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + 1) + (a_1 + 1)x + (a_2 + 1)x^2$$

Megoldás:

$T(0) = 1 + x + x^2 \neq 0$, tehát nem az.

8. óra

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ln\left(1+\frac{1}{k}\right) =?$

  Megoldás:

  $\sum\limits_{k=1}^{N} ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = ln(N+1) \to \infty$

- $\sum\limits_{k=3}^{\infty} ln\left(1-(\frac{2}{k})^2\right) =?$

  Megoldás:

  $\sum\limits_{k=3}^{N} ln\left(1-(\frac{2}{k})^2\right) = ln\frac{(2+N)(1+N)}{6N(N-1)} \to ln\frac{1}{6}$

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} =?$

  Megoldás:

  $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1$

- $\sum\limits_{k=2}^{\infty} ln\left(1-(\frac{1}{k^2}\right) =?$

  Megoldás:

  $\sum\limits_{k=2}^{\infty} ln\left(1-(\frac{1}{k^2}\right) = -ln2$

- $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k^2-1)} =?$

  Megoldás:

  $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{4}$

9. óra

- Konvergensek-e?
  - a.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{n}{e-1})^n$

    Megoldás: Divergens (a_n nem tart 0-hoz.)

– b.) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$
  Megoldás: Konvergens (gyökkritérium)
– c.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{n^2-2}{n^2+5})^{n^2}$
  Megoldás: Divergens (a_n nem tart 0-hoz.)
– d.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{n^2-2}{n^2+5})^{n}$
  Megoldás: Divergens (a_n nem tart 0-hoz.)

- Konvergens-e? (integrálkritériummal)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{lnn}{n^2}$$

Megoldás: Konvergens.

- Konvergens-e? (majoráns-minoráns kritériummal)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Megoldás: Divergens (minoráns kritériummal).

- Biz. be, hogy konvergens! Adjunk becslést az elkövetett hibára, ha a sorösszeget S_{100}-val becsüljük!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{6n-1}\right)^{3n}$$

Megoldás: Konvergens (gyökkritériummal). Ha $n \geq 101$, akkor $a_n \leq \left(\frac{103}{605}^3\right)^n$, így a hibára felső becslés:

$$\left(\frac{103}{605}\right)^{303}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{103}{605}\right)^3} \qquad \left(\approx 1/6^{300}\right).$$

10. óra

- Abszolút konvergens? Feltételesen konvergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2n+4}\right)^{2n}$$

Megoldás:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+4}\right)^{2n}$ konvergens (gyökkritérium), így abszolút konvergens a sor.

- Konvergenciatartomány? Összegfüggvény?

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-nx} \quad a > 0$$

Megoldás:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{-nx} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a^{-x})^n$ ez egy geometria sor, konvergens, ha az együttható kisebb 1-nél, azaz KT=$\{x > 0\}$, ha $a > 1$ és KT=$\{x < 0\}$, ha $a < 1$.

Az összegfüggvény ekkor: $\frac{1}{1-a^{-x}}$

- Egyenletesen konvergens a KT-on, vagy valamely részintervallumán?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$$

Megoldás:

Gyökkritérium alapján konvergens, ha $|x| < 1$, plusz a határon $x = -1$-ben konvergens, $x = 1$-ben divergens, szóval KT=$[-1, 1)$.

KT-n nem egyenletesen konvergens, mivel -1-ben $|a_n| = n$, ami nem konvergál. Viszont [-R,R] intervallumon egyenletesen konvergens, ha R¡1. Itt $|a_n| < -|\frac{(-R)^n}{n^{-R}}| = n^R R^n$, ami konvergens a gyökkritérium miatt, így Weierstrass tétele miatt, itt egyenletesen konvergens az eredeti sor.

- Hatványsorok KT-a?

  - a.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$

    Megoldás:

    $x_0 = 0,\ R = lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1/e$

  - b.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 3^n}$

    Megoldás:

    $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 3^n} (x+2)^n$, így

    $x_0 = -2,\ R = \frac{1}{lim \sqrt[n]{a_n}} = 3/2$

- Adjuk meg az összegüggvényt!

  - a.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+3) x^n$

    Megoldás: $\frac{4x-3x^2}{(1-x)^2}$.

- b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} x^n$
  Megoldás: $\frac{1}{(4-x)^2}$.

11. óra

- Taylor-sorfejtés x_0 körül!
  - a.)$f(x) = \frac{1}{(x+3)^3}, \quad x_0 = 0$
    Megoldás:
    $T(x) = 1/27 - x/27 + (2x^2)/81 - (10x^3)/729 + (5x^4)/729 + ...$
  - b.)$f(x) = x^3 arctg \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 0$
    Megoldás:
    $T(x) = x^5/2 - x^9/24 + x^13/160 - x^17/896 + ...$

- Adjunk becslést legfeljebb h hibával:

$$\int_0^1 ln(1 + \frac{x^2}{3})dx, \quad h = 10^{-2}$$

  Megoldás:

$$ln(1 + \frac{x^2}{3}) = x^2/3 - x^4/18 + x^6/81 + o(x^6)$$

  Ezt integrálva:

$$\int_0^1 ln(1 + \frac{x^2}{3})dx \approx 1/9 - 1/90 = 1/10$$

  Leibniz-sor, így a hiba$< 1/567$.

- Határérték?
  - a.)$f(x, y) = \frac{xy-x+y}{xy+x+y}$
    Megoldás: Nem létezik határérték.
  - b.) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$
    Megoldás: Nem létezik határérték.
  - c.) $f(x, y) = sin \frac{\pi x}{2x+y}$
    Megoldás: Nem létezik határérték.

- Parciális deriváltak, hol folytonos a deriváltak?

– a.)

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+2y^2},\ ha\ (x,y) \neq (0,0), \quad 1,\ ha\ (x,y) = (0,0)$$

Megoldás:

$$f'_x(x,y) = -\frac{2xy^2}{(x^2+2y^2)^2},\ ha\ (x,y) \neq (0,0), \quad \nexists,\ ha\ (x,y) = (0,0)$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2x^2y}{(x^2+2y^2)^2},\ ha\ (x,y) \neq (0,0), \quad \nexists,\ ha\ (x,y) = (0,0)$$

A (0,0)-t leszámítva folytonosak a parciális deriváltak.

– b.)

$$f(x,y) = x^2 sin\frac{1}{x^2+y^2},\ ha\ (x,y) \neq (0,0), \quad 0,\ ha\ (x,y) = (0,0)$$

Megoldás:

$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, deriválható az origóban, de a (0,0)-ban nem folytonosak a parciális deriváltak.

12. óra

- Deriválható-e az origóban, grad f az origóban?

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3},\ ha\ (x,y) \neq (0,0), \quad 0,\ ha\ (x,y) = (0,0)$$

Megoldás:

$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, így a gradiens a (0,0). Nem deriválható, mivel nem is folytonos az origóban.

- Mely pontokban differenciálható totálisan?

$$f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}},\ ha\ (x,y) \neq (0,0), \quad 0,\ ha\ (x,y) = (0,0)$$

Megoldás:

Mindenhol. Origón kívül parciális deriváltak folytonosságából, origóban definicióból.

- Összetett függvények deriváltjai!

$$f(x,y) = 3xy$$

$$x = sin(u+v)$$

$$y = cos(uv + u)$$
$$f'_u = ?,\ f'_v = ?$$

Megoldás:

$$f'_u = 3cos[u(1+v)]cos[u+v] - 3(1+v)sin[u(1+v)]sin[u+v]$$
$$f'_v = 3cos[u(1+v)]cos[u+v] - 3usin[u(1+v)]sin[u+v]$$

- Iránymenti derivált?

$$f(x, y, z) = e^{-x^2-y^2} - z, \quad P_0(1, 0, 1), \quad \underline{v} = 3\underline{i} + 2\underline{j} + 5\underline{k}$$

Megoldás:

grad f=(-2/e,0,-1), így $f'_v = gradf \cdot \underline{v} = -6/e - 5$

13.óra

- Másodfokú Taylor polinom felírása, P_0 körül!

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - 6x - 3y - 5, \quad P_0(1, -2)$$

Megoldás:

$$T(x, y) = -5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$$

- Szélsőértékszámítás!

$$f(x, y) = 2x + y + \frac{4}{xy}$$

Megoldás:

$gradf = 0 \implies x = 1, y = 2$. Itt a Hesse mátrix pozitív definit, tehát lokális minimuma lesz itt.

- Abszolút szélsőérték tartományon!

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$
$$T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Megoldás:

Tartományon belül: $gradf = 0 \implies x = 0, y = 0$. Tartomány határán: $1/\sqrt{2}(\pm 1, \pm 1)$ helyeken lehet szélsőérték. Ezeket végignézve, (0,0)-ban van minimum, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ és $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ helyeken maximum.

14.óra

- Kettős integrál!
  - a.)
$$\int_0^3 \int_0^1 x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$
    Megoldás: ≈ 2.569
  - b.)
$$\int\int_T xsin(xy)dT, \quad T = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \pi/2\}$$
    Megoldás: $2 + 4/\pi \approx 3.273$
  - c.)
$$\int\int_T xsin(xy)dT, \quad T = \{y = x^2 \text{ és } y = x+2 \text{ közti tartomány}\}$$
    Megoldás: 9/4=2.25
- Integrálás sorrendjének cseréjével!
$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2}dxdy$$
  Megoldás: $\frac{e^{16}-1}{4}$
- Polárkoordinátákkal!
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2+y^2)dydx$$
  Megoldás: $\frac{3\pi}{32}$
- Hengerkoordinátákkal! Mennyi az alábbi egyenletek által határolt térfogat?
$$z = 4 + x + 2y$$
$$z = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1$$
  Megoldás: 4π

- Gömbi koordinátákkal!

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$z \geq 0$$

Félgömb tömegközéppontja?

Megoldás: $z_0 = \frac{\int\limits_V z \ \ dV}{\int\limits_V 1 \ \ dV} = \frac{9}{8}$