Lineáris algebra (A, B, C) 11. gyakorlat 2011. november 28–december 2.

Figyelem! MINTAZH a túloldalon!

1. Az alábbi leképezések közül válassza ki a lineáris leképezéseket, a lineáris transzformációkat és a vektortér–izomorfizmusokat, határozza meg mindezek magterét és képterét, valamint ezeknek az altereknek a dimenzióját!

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ \varphi_1\left(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad \varphi_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ \varphi_2\left(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$$

$$\varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ \varphi_3\left(\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ 0\end{bmatrix} \qquad \varphi_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ \varphi_4\left(\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\right) = \alpha\beta$$

$$\varphi_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ \varphi_5\left(\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha\end{bmatrix} \qquad \varphi_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,,\ \varphi_6\left(\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}|\alpha|\\ 0\end{bmatrix}$$

2. Mik azok a geometriai transzformációk, amelyeknek mátrixa az **i**, **j**, **k** bázisban az alábbi:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel az **i**, **j** bázisra vonatkozó mátrixát a sík alábbi lineáris transzformációinak:
a) 60°–os forgatás; b) az x tengelyre való tükrözés;
c) 270°–os forgatás; d) az $x = y$ tengelyre való tükrözés.

4. Legyen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ bázis $\mathbb{R}^2$–ben, $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $[\varphi]^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix}2&-1\\5&-3\end{bmatrix}$. Írja fel a $[\varphi]^{\mathbf{e}'}$ mátrixot, ha $\mathbf{e}'_1 = -3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$. (Bázis lesz–e valóban $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$?)

5. Az előző feladatokból válassza ki a **lineáris transzformációkat**, majd határozza meg ezek **sajátértékeit, sajátvektorait,** és döntse el, hogy van-e hozzájuk **SB**!

6. Legyen ξ_1 a síknak az x tengelyre, η_1 pedig az y tengelyre való tükrözése, továbbá ξ_2, illetve η_2 ugyanezekre a tengelyekre való merőleges vetítések. Számítsa ki a $\xi_1 + \eta_1$ és a $\xi_2 + \eta_2$ összegeket!

7. Írja fel a mátrixát az **i**, **j**, **k** bázisban az x tengely és az y tengely körüli 90°–os forgatásnak. Mi a két transzformáció szorzata? (Számítsa ki a két mátrix szorzatát!)

8. Az alábbi mátrixok egy–egy lineáris transzformáció mátrixai az **i**, **j**, **k** bázisban. Adja meg ugyanezeknek a lineáris transzformációknak a mátrixát az **i**, **i**+**j**, **i**+**j**+**k** bázisban!

$$A = \begin{bmatrix}3&-1&-1\\0&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$