Lineáris algebra (A, B, C) 2. gyakorlat 2011. szeptember 19–23.

1. Az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorhalmazok mely nemüres részhalmazai alkotnak lineárisan független vektorrendszert?

a) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix}3\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$.

2. Tekintsük $\mathbb{R}^4$ azon $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$ elemeit, melyekre

a) $4x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$; b) $x_1x_2 = x_3x_4$; c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$;
d) $x_1 \geq x_2$; e) $x_1 + 4x_4 = 2$; f) $x_4^3 = 0$.

$\mathbb{R}^4$-ben a fenti hat részhalmaz közül melyek alkotnak alteret?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbb{R}^n$ egy nem-üres U részhalmazára $\{\lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \Longrightarrow \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U\}$, akkor U altér.

4. Legyen V egy altér az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ pedig $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, amelyekről azt tudjuk, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ és $2\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ V-ben van, ám $\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ nem eleme V-nek. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok közül melyik van V-ben?

5. Döntsük el, hogy a mondott vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e, összefüggők-e, illetve lehetnek ilyenek és olyanok is:

a) (legalább kételemű) lineárisan független vektorrendszerből elhagyunk egy vektort;
b) lineárisan független vektorrendszerhez hozzávesszünk egy vektort;
c) (legalább kételemű) lineárisan összefüggő vektorrendszerből elhagyunk egy vektort;
d) lineárisan összefüggő vektorrendszerhez hozzávesszünk egy vektort;
e) (legalább kételemű) bázisból elhagyunk egy vektort;
f) bázishoz hozzávesszünk egy vektort;
g) a (legalább kételemű) vektorrendszer egyik vektora egy másiknak négyszerese;
h) a (legalább háromelemű) vektorrendszer egyik vektora két másiknak összege;
i) a vektorrendszer egyik vektora a nullvektor.

6. $n \geq 3$ és $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ esetén melyik igaz az alábbi állítások közül?

a) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ L $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ L .
b) $\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ L $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ L .
c) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ L $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ Ö .
d) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ L $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}-\mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{c}$ L .
e) $\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}, 4\mathbf{a}+5\mathbf{b}+6\mathbf{c}, 7\mathbf{a}+8\mathbf{b}+9\mathbf{c}$ Ö $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ Ö .
f) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ L $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{c}+\mathbf{a}$ Ö .
g) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ L $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{c}, \mathbf{c}-\mathbf{a}$ L .

7. Legyen $n \geq k > 1$ és $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ lineárisan független vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

a) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k,\ \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_k,\ \mathbf{a}_k$;
b) $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k,\ \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$; c) $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k$;
d*) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{a}_k,\ \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_1$; e) $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_k,\ \mathbf{a}_k$.

8*. Legyen $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ lineárisan független vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Mely $\mathbf{b}$ vektorokra lesz az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{a}_k + \mathbf{b}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő?