1. Legyen $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5$ egy bázis $\mathbb{R}^5$-ben és $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_5$. Mely bázisvektorok „cserélhetők ki” $\mathbf{a}$-ra úgy, hogy bázist kapjunk? Mindegyik új bázisban számítsa ki a $\mathbf{c} = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3 + 4\mathbf{b}_4$ vektor koordinátáit!

2. Legyenek adottak az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \in \mathbb{R}^4$ vektorok az $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ triviális bázisában:

$$[\mathbf{a}_1]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{a}_2]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{a}_3]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{a}_4]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{a}_5]_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az elemi bázistranszformáció ismételt alkalmazásával vigyük be a bázisba a lehető legtöbb vektort az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ közül! Értelmezzük az utolsó táblázatot!

3. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ lineárisan függ-e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$-től (azaz előállítható-e lineáris kombinációjukként; másképp: eleme-e az általuk generált altérnek)?

4. Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$-re $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \operatorname{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \operatorname{Span}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

5. Legyenek U_1 és U_2 az $\mathbb{R}^n$ vektortér alterei. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a két altér egyesítése (uniója), $U_1 \cup U_2$ is altér legyen?

6. Tudjuk, hogy valamely $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$-re $\operatorname{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \operatorname{Span}(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e})$. Döntsük el, hogy lineárisan független, vagy összefüggő az $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}$ vektorrendszer!

7. Legyen $n \geq k \geq 1$ és $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ lineárisan független vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Bizonyítsa be, hogy egy $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorra az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha $\mathbf{b} \in \operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

8. Legyen $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Az $\mathbb{R}^3$ alábbi alterei közül melyikben van benne a $\mathbf{d}$ vektor?

a) $\operatorname{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; b) $\operatorname{Span}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$; c) $\operatorname{Span}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

9. Keressünk bázist az $\mathbb{R}^3$ következő altereiben ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ az $\mathbb{R}^3$ triviális bázisa):

a) $\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}\right)$; b) $\operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;

c) $\operatorname{Span}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1)$; d) $\operatorname{Span}(\mathbf{e}_1 - 96\mathbf{e}_2 + 29\mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_2 + 19\mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_3)$.

10*. Legyen $n \geq k > 3$ és $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ lineárisan független vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Milyen $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq j \leq k)$ együtthatók esetén lesz lineárisan független a

$$\lambda_{11}\mathbf{a}_1, \quad \lambda_{12}\mathbf{a}_1 + \lambda_{22}\mathbf{a}_2, \quad \lambda_{13}\mathbf{a}_1 + \lambda_{23}a_2 + \lambda_{33}\mathbf{a}_3, \quad \ldots, \quad \lambda_{1k}\mathbf{a}_1 + \lambda_{2k}\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_{kk}\mathbf{a}_k$$

vektorrendszer?