

1. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját (elemi bázistranszformációval):

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Elemi bázistranszformációval oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{rcl} -x + 3y + 3z & = & 2 \\ 3x + y + z & = & 4 \\ 2x - 2y + 3z & = & 10 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 11 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = & -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x + 3y + z & = & 11 \\ x - y - 2z & = & -7 \\ 3x + 2y - z & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & 4 \\ x_2 - 2x_3 & = & -3 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 3x + 5y & = & 3 \\ x + 2y & = & 3 \\ 5x + 9y & = & 9 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 & = & 3 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 9x_4 & = & 9 \end{array}$$

Néhány szám megváltoztatásával (pl. a negyedik egyenletrendszer harmadik egyenletében a -2 és a -3 felcserélésével) gyártunk újabb megoldandó egyenletrendszereket!

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket! Milyen következtetés adódik ebből a lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldására nézve?

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ x + 1,001y & = & 2,001 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ x + y & = & 2,001 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ x + 1,001y & = & 2,002 \end{array}$$

4*. Hogyan függ az alábbi egyenletrendszer megoldásainak száma az $r \in \mathbb{R}$ értékétől?

$$\begin{array}{rcl} rx_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + rx_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + rx_3 & = & 1 \end{array}$$

5. \mathbb{R}^n egy k -dimenziós alterében melyek igazak a következő állítások közül?

- Minden k -nál kevesebb vektorból álló vektorrendszer lineárisan független.
- Minden k -nál több vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő.
- Az altér minden generátorrendszere legalább k vektorból áll.
- Az altér minden legalább k vektorból álló vektorrendszere az altér generátorrendszere.
- Az altér minden k elemű generátorrendszere az altér bázisa.
- Az altér minden k elemű lineárisan független vektorrendszere az altér bázisa.

6. Adjunk meg \mathbb{R}^4 -ben és $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben olyan altereket, melyek dimenziója $0, 1, 2, 3$, ill. 4 .

7. Tekintsük $n \geq 6$ esetén az \mathbb{R}^n azon $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ elemeit, melyekre

- $x_1 = x_2 = \dots = x_n$
- $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$
- van olyan i , hogy $x_i = 0$
- van olyan i , hogy $x_i \neq 0$
- $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$ és $x_2 = x_4 = x_6 = \dots$
- $x_1 = x_4 = x_7 = \dots, x_2 = x_5 = x_8 = \dots, x_3 = x_6 = x_9 = \dots$
- adott $y \in \mathbb{R}$ mellett $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y$.

A fenti hét részhalmaz közül közül válasszuk ki az altereket, s ezekben keressünk bázist!

8*. Határozzuk meg az előző feladatban előforduló alterekből alkotható altérpárok által generált altereket!