

**Figyelem! MINTAZH a túloldalon!**

1. Legyen  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -36 \\ -2 & 1 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

Végezze el a kijelölt mátrixműveletek közül azokat, amelyek értelmezve vannak:  $AB$ ,  $A + C$ ,  $2A + B^T$ ,  $BA$ ,  $CA$ ,  $AC$ ,  $C^2 (= CC)$ ,  $AA^T$ ,  $CC^T$ .

2. Számítsa ki a következő mátrixhatványokat (az  $\alpha$  valós szám, az  $n$  pozitív egész):

a)  $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}^2$  b)  $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^2$  c)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$  d)  $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^n$  e)  $\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^n$

3. Igazak-e minden  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixra ( $n \geq 2$ ) az alábbi egyenlőségek?

a)  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ; b)  $(A + I_n)(A - I_n) = A^2 - I_n^2$ ;  
c)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ; d)  $(AB)^T = A^T B^T$ .

4. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját, azaz oszlopvektorrendszerük rangját:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad AA^T \quad A^T A \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

5. Egy  $A$  mátrixot *szimmetrikus* nak nevezünk, ha  $A^T = A$ .

- a) Az első feladat megoldásában kapott mátrixok közül melyek szimmetrikusak?  
b) Bizonyítsa be, hogy  $AA^T$  mindig szimmetrikus mátrix.  
c) Igazolja, hogy az  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -ben a szimmetrikus mátrixok alteret alkotnak.  
d) Hány dimenziós ez az altér?

6. Bizonyítandó, hogy  $r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n) \leq r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) + r(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ . Milyen következtetés adódik ebből mátrixok rangjára vonatkozóan?

7. Mi történik egy  $n \times n$ -es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi  $n \times n$ -es mátrixokkal megszorozzuk?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

8\*. Mutassa meg, hogy bármely  $2 \times 2$ -es  $A$  mátrixra az  $I_2$ ,  $A$ ,  $A^2$  mátrixok lineárisan összefüggők.

9. Mennyi az összes olyan  $k \times n$ -es mátrix összege, amelyekben csak 0 és 1 fordul elő?