Lineáris algebra (A, B, C) 6. gyakorlat 2011. október 17–21.

Figyelem! MINTAZH a túloldalon!

1. Írjon föl olyan 2×3–as mátrixokat, amelyek rangja 0, 1, 2, ill. 3.

2. Igazak–e a következő állítások minden $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$-re (és k pozitív egészre)?

a) $\varrho(BA) = \varrho(AB)$ b) $\varrho(A^\top) = \varrho(A)$

c) $\varrho(A - B) \le \varrho(A) - \varrho(B)$ d) $\varrho(A^k) \le \varrho(A)$

3. Amennyiben lehetséges, adja meg az alábbi mátrixegyenletek egy-egy megoldását.

$$\text{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} X = I_2 \qquad \text{b)}\ X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = I_3 \qquad \text{c)}\ X \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Számítsa ki a következő mátrixok inverzét!

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Tegyük fel, hogy $ad - bc = 1$. Számítsa ki az $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

6. Az $M_1, \ldots, M_{14}$ mátrixok közül melyik milyen speciális fajta mátrix (diagonális mátrix, háromszögmátrix, szimmetrikus mátrix, antiszimmetrikus mátrix, projektor mátrix, nilpotens mátrix, invertálható mátrix)?

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_7 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad M_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad M_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \quad M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad M_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

7*. Tegyük föl, hogy egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra $A^2 = \mathbf{0}$. Igazolja, hogy ekkor $I_n + A$ invertálható mátrix, és határozza meg az inverzét!

8. Igazolja, hogy minden 1 rangú mátrix felírható egy oszlopvektor és egy sorvektor mátrixszorzataként.

9. Az 5. és 6. gyakorlat példamátrixai közül melyek írhatók fel egy 3×2–es és egy 2×3–as mátrix szorzataként?