Lineáris algebra (A, B, C) 9. gyakorlat 2011. november 14–18.

1. Határozza meg $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ determinánsát, ha ${}_j[A]_k$ a következő alakú (a_j, $b_k \in \mathbb{R}$) :

a)	$(-1)^{j+k}\,k^2/j$	b)	$(-1)^k\sqrt{j}\,k^3$
c)	$a_j + b_k$	d)	$1 + a_j b_k$
e)	$j + k - 1$	f*)	$(j + k - 1)^2$

2. Legyen U olyan 99–szer 99–es mátrix, amelyre $U^\top = -U$. Mennyi a $\det(U)$?

3. Adjunk képletet $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$ kiszámítására (ha $\exists$)!

4. Számítsa ki a következő mátrixok sajátértékeit, karakterisztikus polinomját, sajátvektorait, és adja meg a sajátaltereket:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Számítsa ki a következő mátrixok sajátértékeit, karakterisztikus polinomját, sajátvektorait, és adja meg a sajátaltereket:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

A felsorolt mátrixok diagonalizálhatók–e $\mathbb{R}$ felett ill. $\mathbb{C}$ felett?

6. Az alábbi mátrixok között vannak-e $\mathbb{R}$ felett hasonlók?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

7. Keressünk olyan mátrix**ok**at, amelyek karakterisztikus polinomja
a) $\lambda^2 - 3\lambda + 7$;
b) $-\lambda^3 + \lambda$;
c) $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1$.

8. Mi a kapcsolat M és M^{-1} sajátvektorai, ill. sajátértékei között?

9. Mit állíthatunk a T mátrix valós sajátértékeiről, ha
a) $T^4 = \mathbf{0}$; b) $T^5 = I_n$; c) $T^6 = I_n$?

10. Tegyük föl, hogy az A diagonalizálható mátrix karakterisztikus polinomja $(3-\lambda)^n$. Mi lehet az A mátrix?

11. Keresendő olyan $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, melyre $\varrho(A^\top A) \neq \varrho(A)$. Egy ilyen példában mi lehet $|A|$?

12. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n} = ?\,,\qquad \begin{vmatrix} 2/x & 1/x^2 & & & \\ 1 & 2/x & 1/x^2 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2/x & 1/x^2 \\ & & & 1 & 2/x \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = ?\,,\qquad \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$

13*.

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2\cos\varphi & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}_{n\times n} = ?,$$

$$\begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \mathbf{0} & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & \ddots & 2\cos\varphi & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$$

14. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ esetén legyen

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \overset{\text{def}}{=} \mathbf{y}^* \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

A 8. gyakorlat 10. feladatának mintájára vizsgáljuk meg $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ műveleti tulajdonságait, kapcsolatát a $\mathbb{C}^n$-beli összeadással és skalárral való szorzással.

15*. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A mátrixra igaz, hogy $\varrho(A^*A) = \varrho(A)$.