Lineáris algebra (A,B,C) **MINTAZH** **2011. október 17–21.**

Sem írott, sem elektronikus segédeszköz nem használható. A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre. MINDEN FELADAT MEGOLDÁSA KÜLÖN LAPRA IRANDÓ!

1. **I**gazak vagy **H**amisak az alábbi állítások? (A választ karikázza be, indokolnia nem kell. Minden helyes válasz 2 pont, minden rossz válasz -2 pont, nincs válasz: 0 pont.)

I H $\mathbb{R}^n$–ben minden bázis n elemű.

I H Van olyan altere $\mathbb{R}^{12}$-nek, amelyben van 3 elemű bázis és 4 elemű bázis is.

I H Van olyan valós együtthatós lineáris egyenletrendszer, amelynek végtelen sok megoldása van.

I H Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható, akkor A^3 is invertálható.

I H Van olyan $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, hogy $ABC = \mathbf{0}$, de $CBA \neq \mathbf{0}$.

A többi feladat megoldását részletezni kell, az eredmény önmagában nem elegendő. Minden feladat értéke 10 pont.

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ L? ; $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{?}{\in} \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$?

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert **az elemi bázistranszformáció módszerével**!

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

4. $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\alpha & \alpha \end{bmatrix}$. Mi lehet a $\varrho(A)$ és az A^{-1} (ha $\exists$) ?

5. $n \geqq 2$; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; A tükröző mátrix, azaz $A^2 = I_n$. Mi lehet a $\varrho(A)$?

6. $n \geq 2$; $\beta \in \mathbb{R}$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ B $\mathbb{R}^n$-ben.

$\beta\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + ... + \mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + ... + \mathbf{e}_n$, ..., $\mathbf{e}_1 + ... + \mathbf{e}_{n-1} + \beta\mathbf{e}_n$ L?, G?, B? ($\mathbb{R}^n$-ben)

7. Legyen $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ adott,

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ \text{és} \\ \alpha_3 = \gamma\delta\alpha_4 \end{array} \right\}, \ W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} \beta_i \in \mathbb{R} \\ \gamma\beta_1^2 = \delta\beta_2 \end{array} \right\}.$$

a) W_1 illetve W_2 altere-e $\mathbb{R}^4$-nek?
b) Ha valamelyik altér, abban keresendő B.
c) Ha mindkettő altér, akkor $\operatorname{Span}(W_1, W_2) =$?

5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1:-10–10 pont.