

Sem írott, sem elektronikus segédeszköz nem használható. A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre. MINDEN FELADAT MEGOLDÁSA KÜLÖN LAPRA IRANDÓ!

1. Igazak vagy Hamisak az alábbi állítások? (A választ karikázza be, indokolnia nem kell. Minden helyes válasz 2 pont, minden rossz válasz  $-2$  pont, nincs válasz: 0 pont.)

**I H**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda \in \mathbb{R}$  esetén  $\lambda \det(A) = \det(\lambda^n A)$ .

**I H**  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -ben  $\det(A^{-1}B) = \det(AB)$  minden 1 determinánsú  $A$  esetén.

**I H** Ha  $\mathbf{x}_i$  j.o. sajátvektora  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -nek ( $i = 1, 2$ ), akkor  $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  j.o. sajátvektora  $A_1 + A_2$ -nek.

**I H**  $\mathbb{R}^{n \times n}$ -ben a hasonló mátrixok determinánsa megegyezik.

**I H** Van végtelen sok olyan lineáris transzformáció  $\mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -ben, amelynek végtelen sok bázisban invertálható a mátrixa.

A többi feladat megoldását részletezni kell, az eredmény önmagában nem elegendő. Minden feladat értéke 10 pont.

2.  $[\mathbf{a}]_{i,j,k} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $[\mathbf{b}]_{i,j,k} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $[\mathbf{c}]_{i,j,k} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ?$ ,  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = ?$ ,  $(\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b} = ?$

3. Számítsa ki az alábbi  $n$ -szer  $n$ -es ( $n \geq 3$ ) determináns értékét! (A főátló alatti átlóban végig 0 van.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

4. Határozza meg a  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix (jobb oldali) sajátértékeit, sajátvektorait, a sajátaltérket, karakterisztikus polinomját, és döntse el, hogy diagonalizálható-e  $\mathbb{R}$  felett!

5. A  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  mátrixhoz megadandó SONB (az  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$  mellett), és meghatározandó a mátrixhoz tartozó kvadratikus alak jellege (milyen definit?)!

6. Legyen  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \beta - \gamma \\ \gamma - \alpha \end{bmatrix}$ .

a)  $\varphi$  lineáris transzformáció-e? Ha igen, melyek a sajátértékei, sajátvektorai, van-e SB?  
b)  $\varphi$  vektortér-izomorfizmus-e?

7.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A$  tükröző mátrix ( $A^2 = I_n$ ).

a) Melyek az  $A$  lehetséges sajátértékei?

b) Mi lehet  $|A + I_n|$ ?

5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1: –10–10 pont.