Lineáris algebra (A,B,C) MINTAZH 2011. november 28–december 2.

Sem írott, sem elektronikus segédeszköz nem használható. A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre. MINDEN FELADAT MEGOLDÁSA KÜLÖN LAPRA IRANDÓ!

1. **I**gazak vagy **H**amisak az alábbi állítások? (A választ karikázza be, indokolnia nem kell. Minden helyes válasz 2 pont, minden rossz válasz -2 pont, nincs válasz: 0 pont.)

I H $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $\det^2(-A) = \det(A^2)$.

I H $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $\det(A^\top B) = \det(BA)$.

I H Van olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, melyre $\det(A^\top A) = 1$, viszont $\det(A) \neq 1$.

I H Ha egy homogén lineáris egyenletrendszer (négyzetes) együtthatómátrixának determinánsa 0, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

I H Ha $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ azonos sajátértékű j.o. sajátvektorai $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$-nek, akkor $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ is j.o. sajátvektora A-nak.

A többi feladat megoldását részletezni kell, az eredmény önmagában nem elegendő. Minden feladat értéke 10 pont.

2. $[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{c}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} =?$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} =?$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{b} =?$

3. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ és $n \geqq 3$ esetén számítsa ki az alábbi n–szer n–es determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \gamma & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{vmatrix}$$

4. Határozza meg a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix (jobb oldali) sajátértékeit, sajátvektorait, a sajátaltereket, karakterisztikus polinomját, és döntse el, hogy diagonalizálható-e $\mathbb{R}$ felett!

5. A $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz megadandó SONB (az $\mathbb{R}^3$-ben $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^\top\mathbf{y} = \mathbf{y}^\top\mathbf{x}$ mellett), és meghatározandó a mátrixhoz tartozó kvadratikus alak jellege (milyen definit?)!

6. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad \varphi\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \beta+\gamma \\ \gamma+\alpha \end{bmatrix}$.

a) φ lineáris transzformáció–e? Ha igen, melyek a sajátértékei, sajátvektorai, van-e SB?

b) φ vektortér–izomorfizmus–e?

7. Az alábbi mátrixok között melyek hasonlók $\mathbb{R}$ felett?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5: 46–70 pont; 4,5: 41–45 pont; 4: 36–40 pont; 3,5: 31–35 pont; 3: 26–30 pont; 2,5: 21–25 pont; 2: 16–20 pont; 1,5: 11–15 pont; 1:-10–10 pont.