Kvantumrendszerek hatékony állapotbecslése

Ruppert László

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi
Egyetem
Analízis Tanszék

Témavezető: Prof. Petz Dénes

2012

Alapok

Kvantummechanikai rendszerek esetén a mérés valószínűségi jellege folytán még a mérhető mennyiségek becsléséhez is statisztikai módszerek szükségesek. Ennek köszönhetően az állapotbecslés a kvantum-információelmélet fontos részét képezi [24, 25, 27].

A kvantumrendszerek jól ismert tulajdonsága, hogy a mérés kimenetelétől függően irreverzibilis módon megváltozik a rendszer állapota. D'Ariano és Yuen megmutatta [15], hogy a becslési eljárás jellegétől függetlenül lehetetlen egy konkrét kvantumrendszer állapotát meghatározni. Ezért egyetlen rendszer helyett annak több, azonos állapotban levő másolatán hajtunk végre mérést, és az állapotot a kísérletek kimeneti statisztikája segítségével becsüljük. Ezt a hetvenes évekig visszavezethető [19, 20] eljárást általában kvantum tomográfiának [13] nevezik. Az állapotbecslési probléma nem újkeletű, viszont a kvantum állapotbecslési eljárások alapos matematikai vizsgálata csak az utóbbi évtizedben indult virágzásnak [11, 12, 16, 23, 34].

Egy állapotbecslési eljárást két összetevő határoz meg: a mérési stratégia, illetve a statisztikai becslés, amely a nyert adatokat az állapotérre képezi. A legtöbb cikk maximum-likelihood (ML), Bayes-i vagy más egyszerű módszer segítségével állít elő becslést a mért adatokból. A mérést illetően rengeteg megközelítés létezik. Egyes szerzők [10, 18] egyetlen mérést hajtanak végre a sok azonos másolatból álló összetett rendszeren és aszimptotikus értelemben bizonyítanak optimalitást. Mások [28, 29] ezeken a rendszereken külön-külön, egymástól függetlenül hajtanak végre véges számú mérést és ebben az esetben vizsgálják a becslés tulajdonságait. A doktori dolgozatomban az utóbbi megközelítést alkalmazom. Emellett új módot mutatok arra, hogy miként lehet részleges információt figyelembe venni a becslés során.

Kvantum tomográfia esetén többféleképpen is figyelembe lehet venni az előzetesen rendelkezésre álló információt. A legnépszerűbb megközelítés az úgynevezett állapotdiszkrimináció: ebben az esetben azt kell eldönteni, hogy több előre adott állapot közül melyikben van a rendszer [14]. Egy másik lehetőség az, hogy ismerjük a valódi állapot a priori eloszlását [16]. A dolgozatomban alkalmazott megközelítésben ismert, hogy a valódi állapot az állapottér egy előre adott alterében van, azaz az állapot néhány paramétere adott.

A munkám alapötlete Wooters és Fields 1989-es, alapvető fontosságú publikációjáig [35] vezethető vissza. Ők ebben a cikkben a becslés átlagos információnyereségét maximalizálták a lehetséges valódi állapotok felett. Eredményül azt kapták, hogy a komplementáris mérések optimálisak. A komplementaritás heurisztikus koncepciója a kvantumelmélettel együtt született, a pontos matematikai definíciót Accardi [9] és Kraus [22] adta meg. A [26] hivatkozás áttekintést ad a komplementaritás fogalmáról. A mi esetünkben a komplementaritás azt jelenti, hogy a mérések kvázi-ortogonálisak, más szóval a nyom nélküli részeik ortogonálisak a Hilbert–Schmidt-féle belső szorzat szerint.

A [2, 28] hivatkozás mellékeredményként említi, hogy qubitek esetén a komplementáris mérések optimálisak. Ez az előzőnél

[35] lényegesen gyengébb állítás, viszont ők más mennyiséget optimalizáltak: az információnyereség maximalizálása helyett az átlagos kovarianciamátrix determinánsát minimalizálták:

$$\det \langle \mathrm{Var}\,(\hat{\theta}) \rangle \to \min . \tag{1}$$

Ezt a mennyiséget a [11] hivatkozásban vizsgálták tovább, ez a saját munkám közvetlen előzménye. Ebben (1) felhasználásával bizonyították, hogy a komplementáris mérések elég általános feltételek mellett optimálisak, ezzel javítván Wooters és Fields eredményét. Nem foglalkoztak az ismert paraméter és az egyetlen POVM esetével, azonban az eredményeik sejtették, hogy az átlagos kovarianciamátrix determinánsa bonyolultabb állapotbecslési feladatok esetén is hasznos lehet.

Léteznek egyetlen POVM-mel kapcsolatos eredmények is, viszont az ezek által alkalmazott megközelítések általában jelentősen különböznek a több Neumann-mérést alkalmazóktól. Egy pozitív operátor értékű mérés (POVM) pozitív operátorok olyan $\{E_i \,:\, 1 \le i \le k\}$ halmaza, melyre $\sum_i E_i = I$.

Tekintsük $P_i,\ 1 \le i \le k$ projekciók olyan halmazát, melyre

$$E_i = \frac{1}{\lambda} P_i \quad \text{és} \quad \mathrm{Tr}\, P_i P_j = \mu \quad (i \neq j). \tag{2}$$

Abban az esetben, ha ezeknek a projekcióknak egy a rangja $k = n^2$, $\lambda = n$ és $\mu = 1/(n+1)$ paraméterek mellett, a mérést szimmetrikus, információsan teljes POVM-nek (SIC-POVM) [36] hívják. A SIC-POVM-ek jelenleg aktívan kutatott területnek számítanak [23, 30, 31]. Zauner megmutatta, hogy $n \le 5$ esetén létezik SIC-POVM. Ugyan történt analitikus, illetve numerikus eszközök felhasználásával további előrelépés [17, 33], ennek ellenére a SIC-POVM-ek létezése általános n esetén még mindig nyitott kérdés.

Rehacek, Englert és Kaszlikowski abból indult ki, hogy annak ellenére, hogy a standard módszer hat mérési irányt vesz figyelembe, a qubit esetben négy is elegendő az állapot becsléséhez [29]. A POVM elemeit egy Bloch-térbeli szabályos tetraéder csúcsainak megfeleltve pont a qubitek esetén jól ismert SIC-POVM példát kapjuk. Scott [32] a Hilbert–Schmidt-távolság négyzetének minimalizálásával kapta meg az optimális lineáris állapotbecslést, és egyúttal általános n dimenzióra bizonyította a SIC-POVM-ek optimalitását. Engem az az eset is érdekelt, amikor néhány paraméter adott, ezért általánosítottam Scott módszerét. Ennek az általánosításnak az alkalmazásával találtam példát a (2) egyenlet $k < n^2$ esetére is.

A dolgozatomban különböző állapotbecslési feladatokra adom meg a legjobb becslési eljárást. Foglalkozom a több Neumann-mérés, illetve az egyetlen POVM esetével is. A részleges a priori információ problémáját qubitek és többszintű rendszerek esetén is megvizsgálom. Bevezetem a SIC-POVM-ek egy új általánosítását és analitikus, illetve numerikus módszerek segítségével megvizsgálom, hogy milyen tulajdonságokkal bír.

Főbb eredményeim

1. Az átlagos kovarianciamátrix determinánsa [3, 4]

Egy $\rho \in M_n(\mathbb{C})$ mátrix $n^2 - 1$ valós paraméterrel rendelkezik. Ha a $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ paraméterek nem ismertek, a többi viszont igen, akkor ezt az információt fel tudjuk használni a $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k)$ becslés konstrukciójánál. Ahhoz, hogy optimalitásról beszélhessünk, meg kell adni, hogy milyen $f(\theta, \hat{\theta})$ hibafüggvényt minimalizálunk. A dolgozatomban főként (2-4. tézispont) az átlagos kovarianciamátrix determinánsának

$$f(\theta, \hat{\theta}) = \det \langle \mathrm{Var}\,(\hat{\theta}) \rangle \to \min\,. \tag{3}$$

minimalizálására koncentrálok. Ez a mennyiség más szerzőknél is előfordult, viszont nem aknázták ki teljes mértékben a benne rejlő lehetőségeket. A dolgozatom több alkalmazási területet is megad; a több Neumann-mérés és az egyetlen POVM esetén kívül még numerikus optimalizáláshoz is felhasználja ezt a mennyiséget.

2. Több Neumann-mérés [3]

A 3.1 fejezetben feltesszük, hogy pontosan elégséges számú kételemű POVM-mel rendelkezünk: $\{F_1, I - F_1\}$, $\{F_2, I - F_2\}$, …, $\{F_k, I - F_k\}$. Jelölje $\mathcal{A}$ az ismert paraméterek, $\mathcal{B}$ pedig az ismeretlen paraméterek által generált alteret, azaz tekintsük

$M_n(\mathbb{C})$ alábbi felbontását:

$$M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}I \oplus \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}.$$

Ezekkel a jelölésekkel az eredményeket a következő tétel foglalja össze.

1. tétel *Ha az $F_1, \ldots, F_k$ pozitív kontrakcióknak megegyezik a spektrumuk, akkor az átlagos kovarianciamátrix determinánsa abban az esetben minimális, ha az $F_1, \ldots, F_k$ operátorok komplementárisak egymásra és $\mathcal{A}$-ra nézve.*

Az újdonságot itt az az eset jelenti, amikor vannak ismert paraméterek. Az ismert paraméterek által nyújtott információ felhasználásával kevesebb mérésre van szükség, emellett azt is megkaptuk, hogy a méréseknek kvázi-ortogonálisnak kell lenniük az ismert paraméterek által generált altérre.

3. Egyetlen POVM [3]

A 3.2 fejezet az egyetlen $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ pozitív operátor értékű mérés esetével foglalkozik. n dimenzióban csak arra az esetre sikerült analitikus eredményt elérni, amikor a sűrűségmátrix egyetlen eleméről sem feltételezzük, hogy ismert.

2. tétel *Ha létezik szimmetrikus és információsan teljes rendszer, akkor az optimális POVM annak a P_i projekcióiból tevődik össze: $E_i = P_i/n$ $(1 \leq i \leq n^2)$.*

Más szóval megmutattuk a SIC-POVM optimalitását ugyanazon módszer és mennyiség (3) felhasználásával, mint az előző, Neumann-méréses esetben.

Az egyik qubit esethez kapcsolódóan is nagyon érdekes eredményt kaptunk:

3. tétel *Az ismeretlen θ_1 és θ_2 Bloch-paraméterek meghatározásához az optimális POVM-et a következő P_i, $1 \le i \le 3$ projekciók adják meg:*

$$E_i = \frac{2}{3}P_i, \quad \operatorname{Tr}\sigma_3 P_i = 0, \quad \operatorname{Tr} P_i P_j = \frac{1}{4} \quad i \neq j\text{-re.}$$

Tehát ha van ismert és ismeretlen paraméter is, akkor az optimális POVM szimmetrikus és komplementáris az ismert paraméterek által generált altérre. Ez a tétel az első és a második tétel kombinációja. Az optimális mérés tulajdonképpen a SIC-POVM-ek általánosításaként fogható fel, ezért *feltételes SIC-POVM*-nek neveztük el.

4. Numerikus algoritmus [4]

A 3.3.1 fejezetben bemutatok egy a feltételes SIC-POVM-ek tulajdonságainak tanulmányozására szolgáló algoritmust, amely az átlagos kovarianciamátrix determinánsát (3) minimalizálja. Az algoritmus hatékonyan működik, a segítségével sikerült különböző esetekben példákat mutatnom, analitikusan is:

- Az első nemtriviális példa SIC-POVM-ekre

$$E_1 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^6 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon^3 \\ \varepsilon^5 & \varepsilon^4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ \varepsilon^5 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & 1 \end{bmatrix}, E_4 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 \\ \varepsilon^3 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$E_5 = E_2^{\intercal},\ E_6 = E_3^{\intercal},\ E_7 = E_4^{\intercal},$$

- A diagonális mátrixegységekből álló mérés bármely dimenzióban egyszerű példa a feltételes SIC-POVM-ekre.
- Van kettő rangú projekciókat tartalmazó feltételes SIC-POVM.
- Adtam példát olyan esetre is, amikor nem létezik feltételes SIC-POVM.

Ezeknek az eredményeknek a felhasználásával megadható a feltételes SIC-POVM-ek pontos definíciója:
Definíció $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ *feltételes SIC-POVM-et alkot, ha az E_i elemek kielégítik a (2)-beli követelményeket és komplementárisak az ismert paraméterek által generált altérre.*

5. Feltételes SIC-POVM-ek [5]

A 3.3.2 fejezetben analitikusan megmutatom, hogy a feltételes SIC-POVM-ek optimálisak. A átlagos kovarianciamátrix determinánsa (3) helyett viszont itt [32]-hoz hasonlóan a Hilbert–Schmidt-távolság négyzetét minimalizáltam.
4. tétel *A feltételes esetben az optimális POVM elemei egy rangú projekciók többszöröseként adhatók meg, amelyek a következő tulajdonságokkal bírnak:*

$$E_i = \frac{n}{k}P_i, \quad \operatorname{Tr} P_iP_j = \frac{k-n}{n(k-1)} \quad (i \neq j)$$

$$\textit{és} \quad \operatorname{Tr} \sigma_l P_i = 0 \quad (\forall l : \sigma_l \in \mathcal{A}).$$

Tehát feltéve, hogy létezik egy rangú elemekből álló feltételes SIC-POVM, az optimális is. A (2) egyenletben szereplő konstansok

$$\lambda = \frac{k}{n} \text{ és } \mu = \frac{k-n}{n(k-1)}.$$

Megjegyzendő, hogy ezek a konstansok csak az állapot dimenzionalitásától és az ismeretlen paraméterek számától függnek.

Ha az összes paraméter ismeretlen (azaz $k = n^2$), speciális esetként megkapjuk a SIC-POVM-eket. Ennél fogva azt, hogy feltételes SIC-POVM létezik-e, nyilvánvaló módon legalább olyan nehéz megválaszolni, mint a SIC-POVM-ek létezésére vonatkozó kérdést. A válasz azonban az utóbbi esetben sem ismert.

Kapcsolódó publikációk

[1] Hangos K. M. és Ruppert L., *State estimation methods using indirect measurements*, Quantum Probability and Related Topics, World Scientific, 163-180. o., 2011.

[2] Petz D., Hangos K. M. és Ruppert L., *Quantum state tomography with finite sample size*, in Quantum Bio-Informatics, eds. L. Accardi, W. Freudenberg, M. Ohya, World Scientific, 247-257. o., 2008.

[3] Petz D. és Ruppert L., *Efficient quantum tomography needs complementary and symmetric measurements*, elfogadva Rep. Math. Phys. által, `http://arxiv.org/abs/1011.5210`

[4] Petz D. és Ruppert L., *Optimal quantum state tomography with known parameters*, Journal of Physics A: Math. Theor. **45**, 085306, 2012.

[5] Petz D., Ruppert L. és Szántó A., *Conditional SIC-POVMs*, publikációra vár, `http://arxiv.org/abs/1202.5741`

[6] Ruppert L., Magyar A. és Hangos K. M., *Compromising non-demolition and information gaining for qubit state estimation*, Quantum Probability and Related Topics, World Scientific, 212-224. o., 2008.

[7] Ruppert L. és Hangos K. M., *Martingale approach in quantum state estimation using indirect measurements*, Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 2049-2054. o., 2010.

[8] Ruppert L., Virosztek D. és Hangos K. M., *Optimal parameter estimation of Pauli channels*, elfogadva a Journal of Physics A: Math. Theor. által.

Egyéb hivatkozások

[9] L. Accardi, *Some trends and problems in quantum probability*, Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes, L. Accardi, A. Frigerio és V. Gorini szerk., Lecture Notes in Math. **1055**, 1-19. o., Springer, 1984.

[10] E. Bagan, M. A. Ballester, R. D. Gill, A. Monras és R. Munoz-Tapia, *Optimal full estimation of qubit mixed states*, Phys. Rev. A, 73, 032301, 2006.

[11] T. Baier és Petz D., *Complementarity and state estimation*, Rep. Math. Phys., **65**, 203-214. o., 2010.

[12] M. Cramer, M. B. Plenio, S. T. Flammia, D. Gross, S. D. Bartlett, R. Somma, O. Landon-Cardinal, Y-K. Liu és D. Poulin, *Efficient quantum state tomography*, Nat. Commun., **1 (9)** 149. o., 2010.

[13] G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris és M. F. Sacchi, *Quantum tomography*, Advances in Imaging and Electron Physics, **128**, 205-308. o., 2003.

[14] G. M. D'Ariano, M. F. Sacchi és J. Kahn, *Minimax quantum state discrimination*, Phys. Rev. A, **72**, 032310, 2005.

[15] G. M. D'Ariano és H. P. Yuen, *Impossibility of measuring the wave function of a single quantum system*, Physical Review Letters, **76**, 2832-2835. o., 1996.

[16] R. Demkowicz-Dobrzanski, *Beyond quantum Fisher information: optimal phase estimation with arbitrary a priori knowledge*, Phys. Rev. A, **83**, 061802, 2011.

[17] S. T. Flammia, *On SIC-POVMs in prime dimensions*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** 13483, 2006.

[18] M. Hayashi és K. Matsumoto, *Asymptotic performance of optimal state estimation in quantum two level system*, J. Math. Phys. **49**, 102101, 2008.

[19] C. W. Helstrøm, *Quantum decision and estimation theory*, Academic Press, New York, 1976.

[20] A. S. Holevo, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, North-Holland, 1982.

[21] K. Jacobs és D. A. Steck, *A straightforward introduction to continuous quantum measurement*, Contemporary Physics **47**, 279, 2006.

[22] K. Kraus, *Complementary observables and uncertainty relations*, Phys. Rev. D (3) **35**, 3070-3075. o., 1987.

[23] Z. E. D. Medendorp, F. A. Torres-Ruiz, L. K. Shalm, G. N. M. Tabia, C. A. Fuchs és A. M. Steinberg, *Experimental characterization of qutrits using SIC-POVMs*, Phys. Rev. A **83**, 051801, 2011.

[24] M. A. Nielsen és I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[25] M. Paris és J. Rehacek, *Quantum State Estimation*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[26] Petz D., *Algebraic complementarity in quantum theory*, J. Math. Phys. **51**, 015215, 2010.

[27] Petz D., *Quantum Information Theory and Quantum Statistics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2008.

[28] Petz D., Hangos K. M. és Magyar A., *Point estimation of states of finite quantum systems*, J. Phys. A: Math. Theor., **40**, 7955-7969. o., 2007.

[29] J. Rehacek, B-G. Englert és D. Kaszlikowski, *Minimal qubit tomography*, Physical Review A, **70**, 052321, 2004.

[30] M. Renes, R. Blume-Kohout, A. J. Scott és C. M. Caves, *Symmetric informationally complete quantum measurements*, J. Math. Phys. **45**, 2171, 2004.

[31] M. B. Ruskai, *Some connections between frames, mutually unbiased bases, and POVM's in quantum information theory*, Acta Appl. Math. **108**, 709-719. o., 2009.

[32] A. J. Scott, *Tight informationally complete quantum measurements*, J. Phys. A **39**, 13507, 2006.

[33] A. J. Scott és M. Grassl, *SIC-POVMs: A new computer study*, J. Math. Phys. **51**, 042203, 2010.

[34] Y. S. Teo, H. Zhu, B.-G. Englert, J. Rehacek, Z. Hradil, *Knowledge and ignorance in incomplete quantum state tomography*, Phys. Rev. Lett. **107**, 020404, 2011.

[35] W. K. Wooters és B. D. Fields, *Optimal state determination by mutually unbiased measurements*, Annals of Physics, **191**, 363-381. o., 1989.

[36] G. Zauner, *Quantendesigns - Grundzüge einer nichtkommutativen Designtheorie*, PhD dolgozat (Bécsi Egyetem), 1999.