

Kalkulus kilencedik feladatsor

Komplex számok

1. Határozza meg a $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ komplex szám algebrai alakját, ha $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 2 + i$!

Ha $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 2 + i$, akkor

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{3 + 2i}{2 - i} = \frac{(3 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{6 + 3i + 4i - 2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

2. Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket!

a, $3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

b, $\frac{2 + i}{i(1 - 4i)}$

Megoldások: a) $3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 3 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$,

b) $\frac{2 + i}{i(1 - 4i)} = \frac{2 + i}{4 + i} = \frac{(2 + i)(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{8 + 4i - 2i + 1}{17} = \frac{9}{17} + \frac{2}{17}i$.

3. Írjuk fel a következő számok trigonometrikus alakját!

a, $\sqrt{6} - 2i\sqrt{2}$

b, $-4i$

c, 8

Megoldások: a) $\sqrt{6} - \sqrt{2}i = \sqrt{6+2} \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}i \right) = \sqrt{8} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{8} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$

b) $-4i = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$, c) $8 = 8(\cos 0 + i \sin 0)$.

4. Végezzük el a következő gyökvonásokat!

a, $\sqrt[3]{1}$

b, $\sqrt[4]{-16}$

c, $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$

Megoldások: a) $1 = \cos 0 + i \sin 0$, tehát a 3 harmadik gyök

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$ és $\sqrt[4]{16} = 2$, tehát a 4. negyedik gyök:

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \quad 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$

$$2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \quad 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

c) $1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1+3} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, tehát a harmadik gyökök:

$$\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right), \quad \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right), \quad \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right).$$

5. Végezzük el a következő hatványozásokat!

a, $(1 + i\sqrt{3})^3$

b, $(1 + i)^8$

c, $(1 - i)^4$

Megoldások: a) $(1 + i\sqrt{3})^3 = \left(2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right)^3 = 8 (\cos \pi + i \sin \pi) = -8.$

b) $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, így $(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos \frac{8\pi}{4} + i \sin \frac{8\pi}{4} \right) = 16.$

c) $1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$, így $(1 - i)^4 = (\sqrt{2})^4 (\cos 7\pi + i \sin 7\pi) = -4.$

6. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^2 + 6z + 10 = 0$ másodfokú egyenletet!

A megoldáshoz helyettesítsünk be a másodfokú egyenlet megoldóképletébe: $\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i.$

7. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a, $z^3 = 1 + i$

b, $|z| - z = 1 + 2i$

c, $z^2 = \bar{z}$

d, $2iz^3 = (1 + i)^8$

e, $\frac{7i + 3}{7 - 3i} z^4 + 8(\sqrt{3} + i) = 0$

Megoldások: a) $z^3 = 1 + i$ egyenlet megoldásai $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ harmadik gyökei, vagyis

$$\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \quad \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), \quad \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

b) $z = a + bi$ algebrai alakból az $\sqrt{a^2 + b^2} - a - bi = 1 + 2i$ egyenletet kapjuk. A két oldal képzetes része megegyezik, vagyis $b = -2$. Emiatt a valós részekre $\sqrt{a^2 + 4} - a = 1$ adódik, vagyis $a^2 + 4 = a^2 + 2a + 1$, így $a = \frac{3}{2}$, vagyis a megoldás $z = \frac{3}{2} - 2i$.

c) $z = a + bi$ algebrai alakból $a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$, vagyis $2ab = -b$, tehát $b = 0$ vagy $a =$

$-\frac{1}{2}$. Ha $b = 0$, akkor $a^2 = a$, tehát $a = 0$ vagy $a = 1$. Ha $a = -\frac{1}{2}$, akkor a valós részekre az $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$ adódik, így $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az egyenlet megoldásai: $0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
d) $(1+i)^8 = 16$, tehát $iz^3 = 8$, így $z^3 = -8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, vagyis a megoldások a harmadik gyökök:

$$\begin{aligned} 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) &= 2i, \\ 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) &= \sqrt{3} + i, \\ 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) &= \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

e) $\frac{7i+3}{7-3i} = \frac{i(7-3i)}{7-3i} = i$, vagyis $iz^4 = -8(\sqrt{3}+i)$, tehát

$$z^4 = 8(\sqrt{3}i - 1) = 8 \cdot 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

így a megoldások:

$$\begin{aligned} 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{3} + i, & 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) &= -1 + \sqrt{3}i \\ 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) &= -\sqrt{3} - i, & 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) &= 1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$