ANALÍZIS 1. ALÁÍRÁSPÓTLÓ 2. ZH. 2018. december 12.
Mérnökinformatikus szak Munkaidő: 75 perc

1. feladat (5+8=13 pont)
a) Legyen x_0 az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának belső pontja! Adja meg a $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ definícióját!
b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{|x-2|} = \infty!$$

2. feladat (8+8+8=24 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{\sin(3x)}$, *b*) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$, *c*) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$

3. feladat (14 pont)
Hol és milyen típusú szakadásai vannak az

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

függvénynek?

4. feladat (6+6+6+6=24 pont)
A deriválási szabályok alkalmazásával határozza meg a következő függvények deriváltfüggvényét!

a) $f(x) = \sin^3(x^2+1)$, *b*) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}$,
c) $h(x) = 2^{3x} \cdot \operatorname{arsh}(2x+1)$, *c*) $k(x) = x^x \quad (x > 0)$

5. feladat (12 pont) A *definíció alapján* határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}$$

függvény deriváltját az $x_0 = 3$ pontban!

6. feladat (13 pont)
Adja meg a legbővebb intervallumokat, amelyen az $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 2x - 3)$ függvény monoton növő, illetve monoton csökkenő! Hol és milyen típusú lokális szélsőértéke van f-nek?

1 a, Amh $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ha $\forall P>0$ -hoz $\exists \delta(P)>0$ amelyre $\boxed{13}$

$f(x) > P$ ha $0 < |x-x_0| < \delta(P)$ és $x \in D_f$. 5

b, $\frac{x^2}{|x-2|} \overset{*}{>} \frac{1}{|x-2|} > P$ 3 ha $\frac{1}{P} > |x-2|$, így $\delta(P) = \min\left\{\frac{1}{P}, 1\right\}$ jó 2

* ha $x>1$ azaz $\delta(P) < 1$ 3

2 a, $\boxed{24}$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(2x)}{\sin(3x)} \overset{L'H}{\underset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2\overbrace{\cosh(2x)}^{\to 1}}{3\underbrace{\cos(3x)}_{\to 1}} = \frac{2}{3}$ 2 2 2 2

b, $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \overset{L'H}{\underset{"\frac{0}{0}"}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$ 2 2 2 2

c, $\lim_{x\to\infty} \overset{\infty}{x^2} \overset{0}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{L'H}{\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{L'H}{\underset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ 2 2 2 2

3 $\boxed{14}$ $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}$ 2 folytonos fvek összetétele, így csak a nevező gyökeiben lehet szakadása: $x^2-1=0 \iff x^2=1 \iff x=\pm 1$ 2, így $f(x)$ biztosan folytonos $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$-en.

$x=-1$

$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{|\overbrace{x-1}^{\to -2}|}{x^2-1} = \lim_{x\to -1+} \frac{\overset{-1}{\cancel{1-x}}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to -1+} \frac{-1}{\underbrace{x+1}_{\to 0+}} = -\infty$ 5

$\Rightarrow$ lényeges szakadás

$x=1$

$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{|\overbrace{x-1}^{\to 0+}|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ 5

$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{|\overbrace{x-1}^{\to 0-}|}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow$ véges ugrás

4 $\boxed{24}$

a, $\left(\sin^3(x^2+1)\right)' = 3\sin^2(x^2+1)\cdot\cos(x^2+1)\cdot 2x$ 6

b, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}\right)' = \left((x^2+3)^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}(x^2+3)^{-\frac{4}{3}}\cdot 2x$ 2 4

c, $\left(2^{3x}\cdot \operatorname{arsinh}(2x+1)\right)' = \ln 2 \cdot 2^{3x}\cdot 3\cdot \operatorname{arsinh}(2x+1) + 2^{3x}\frac{1}{\sqrt{1+(2x+1)^2}}\cdot 2$ 3 3

d, $(x^x)' = \left(e^{\ln(x^x)}\right)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = e^{x\ln(x)}\left(\ln(x) + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$ 2 4

(5) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, azaz (3)

$\boxed{12}$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2(3+h)+1} - \frac{1}{2 \cdot 3+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2h+7} - \frac{1}{7}}{h} =$$ (4)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{7-(2h+7)}{7(2h+7)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-2h}{7(2h+7)}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{7(\underbrace{2h}_{\to 0}+7)} = \frac{-2}{49}$$ (3) (2)

(6) $f(x) = \arctan(x^2 - 2x - 3)$

$\boxed{13}$

$$f'(x) = \overbrace{\frac{1}{1+\underbrace{(x^2-2x-3)^2}_{\geq 0}}}^{>0} \cdot (2x-2)$$ (4)

$> 0 \iff 2x-2 > 0 \iff x > 1$

$< 0 \iff 2x-2 < 0 \iff x < 1$ (3)

$= 0 \iff 2x-2 = 0 \iff x = 1$

$\Rightarrow f(x)$ szig mon nő $(1, \infty)$-en (2)

szig mon csökk $(-\infty, 1)$-en (2)

$f'(x)$ $\ominus \to \oplus$ vált $x=1$-ben, így itt lokális minimuma van a fvnek. (2)