ANALÍZIS 1. | **II. Pótzárthelyi** | **2018. december 6.**

Mérnökinformatikus szak | β-variáns | Munkaidő: 75 perc

1. feladat (4+14 pont)

a) Legyen $A \in \mathbb{R}$, x_0 pedig az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja! Mit jelent az, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$?

b) A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{5 - x^2} = 2,$$

azaz adjon meg egy lehetséges $\delta(\varepsilon)$ függvényt!

2. feladat (9+8=17 pont)

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^4 \cdot \left(\cos^2(4x) + 3\right), & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{\sin^2(3x)}{2x^2}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a) Pontosan mely pontokban folytonos, illetve deriválható az f függvény? (Válaszát indokolja meg!)

b) Határozza meg a függvény deriváltfüggvényét ott, ahol létezik!

3. feladat (17 pont)

Adja meg az $f(x) = \pi - \arcsin(2x - 3)$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Igazolja, hogy a függvény invertálható, határozza meg inverzét, annak értelmezési tartományát, értékkészletét és deriváltját!

4. feladat (10+10+10 pont)

Számolja ki az alábbi határértékeket!

$$a)\ \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x^2 + x - 1)}{\operatorname{arctg}(x-1)}, \qquad b)\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right), \qquad c)\ \lim_{x \to 0} (\operatorname{ch} x)^{\frac{3}{\operatorname{sh}^2 x}}$$

5. feladat (18 pont)

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken az $f(x) = (x^2 - 7)e^{-x}$ függvény konvex illetve konkáv! Mely pontokban van a függvénynek inflexiós pontja?

IMSC feladat (8 IMSC pont)

Egy R sugarú gömbbe egyenes körhengereket írunk. Adjuk meg a maximális térfogatú körhenger h magasságát (R arányában)!

18 1 D Amh $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ amelyre teljesül, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\forall x \in D_f$-re melyre $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$. 4

b, $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{5-x^2} = 2$ def szerint, ui:

$$\left|\sqrt{5-x^2} - 2\right| \overset{2}{=} \left| \left(\sqrt{5-x^2} - 2\right) \frac{\sqrt{5-x^2}+2}{\sqrt{5-x^2}+2} \right| = \left| \frac{\sqrt{5-x^2}^2 - 2^2}{\sqrt{5-x^2}+2} \right| =$$

$$\left| \frac{5-x^2-4}{\sqrt{5-x^2}+2} \right| \overset{4}{=} \frac{|1-x^2|}{|\underbrace{\sqrt{5-x^2}}_{\geq 0}+2|} = \frac{|1-x|\cdot|1+x|}{2+\underbrace{\sqrt{5-x^2}}_{\geq 0}} \le \frac{|x-1|}{2} \overset{2}{\cdot} \overbrace{|x+1|}^{<3 \text{ ha } 0<x<2} \overset{*}{\le} |x-1|\cdot\frac{3}{2}$$

Azaz $\left|\sqrt{5-x^2}-2\right| \underset{\text{ha}^* \ \delta(\varepsilon)<1}{\le} |x-1|\cdot\frac{3}{2} \overset{4}{<} \varepsilon$ ha $|x-1| < \frac{2\varepsilon}{3}$, azaz például $\delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \frac{2\varepsilon}{3}\right\}$ 2 megfelelő lesz.

2

17

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^4\left(\cos^2(4x)+3\right) & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{\sin^2(3x)}{2x^2} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a, Hol folytonos? Mivel folytonos függvények kompozíciója, ezért folytonos kivéve esetleg az illesztési pontban (a nevezőnek nincsen gyöke, ui $x=0$-ban nem a második definíció él) 3. Ezt megvizsgálva:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2(3x)}{2x^2} = \lim_{x\to 0+} \overbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}^{\to 1} \cdot \overbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}^{\to 1} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \quad 3$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (x-2)^4\left(\cos^2(4x)+3\right) = 2^4(1+3) = 64 \quad 1$$

Mivel létezik mindkét oldali határérték, de nem egyenlőek, ezért itt a függvény nem folytonos, hanem véges ugrása van.

Hol diffható: a függvény mindenütt deriválható fvek összetétele, így az illesztési pont kivételével mindenütt deriválható. $x=0$-ban nem folytonos, így ott nem is deriválható (ui. ez szükséges feltétel). 2

$$\text{b, } f'(x) = \begin{cases} 4(x-2)^3\left(\cos^2(4x)+3\right) + (x-2)^4\left(2\cos(4x)(-\sin(4x))\right)\cdot 4 & x<0 \quad 4 \\ \dfrac{2\sin(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3\cdot 2x^2 - \sin^2(3x)\cdot 2\cdot 2x}{(2x^2)^2} & \text{ha } x>0 \quad 4 \end{cases}$$

3 $f(x) = \pi - \arcsin(2x-3)$ $\quad D_f = ?,\ R_f = ?,\ \exists f^{-1}?,\ f^{-1} = ?,\ D_{f^{-1}} = ?\ R_{f^{-1}} = ?$

$\boxed{17}$

Mivel $D_{arcsin} = [-1, 1]$ és $R_{arcsin} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, így D_f-hez $-1 \le 2x-3 \le 1 \iff 2 \le 2x \le 4 \iff 1 \le x \le 2$, azaz $D_f = [1, 2]$ 2 Hasonlóan ha $x \in [1,2]$ akkor az arcsin teljes ÉT-jén végighalad $2x-3$, így $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(2x-3) \le \frac{\pi}{2}$ és kérte minden értékét felveszi, így $\frac{\pi}{2} \ge -\arcsin(2x-3) \ge -\frac{\pi}{2}$

2 $R_f = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Leftarrow \frac{3\pi}{2} \ge \pi - \arcsin(2x-3) \ge \frac{\pi}{2}$

$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \cdot 2 < 0$ az $(1,2)$-n, így itt az $f(x)$ szig. mon. csökken, így $\exists f^{-1}(x)$. 4 Mivel $D_f = R_{f^{-1}}$, és $R_f = D_{f^{-1}}$, így $D_{f^{-1}} = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $R_{f^{-1}} = [1, 2]$. 3

$y = f(x) = \pi - \arcsin(2x-3)$ -ból:

$$y - \pi = -\arcsin(2x-3)$$
$$\pi - y = \arcsin(2x-3)$$
$$\sin(\pi - y) = 2x - 3$$
$$\sin(\pi - y) + 3 = 2x$$
$$\frac{\sin(\pi-y)+3}{2} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sin(\pi-x)+3}{2} \quad 3$$
$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{2}\cos(\pi-x)(-1) \quad 3$$

4 a, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\arctan(x-1)} = ?$

$\boxed{30}$

Mivel $\ln(1) = 0$ és $\arctan(0) = 0$ ez egy "$\frac{0}{0}$" alakú határérték. Így alkalmazható a L'Hospital szabály 2

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\arctan(x-1)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x+1}{x^2+x-1}\ 3}{\frac{1}{1+(x-1)^2}\ 3} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{1}} = 3 \quad 2$$

b, $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\underbrace{2x}_{\to 0}} - \frac{1}{\underbrace{e^{2x}-1}_{\to 0}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{e^{2x}-1}^{\to 0} - \overbrace{2x}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to 0}(\underbrace{e^{2x}-1}_{\to 0})} \underset{"\frac{0}{0}"}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-2}{2(e^{2x}-1) + 2x2e^{2x}} \quad 3 \quad 2$$

$$\underset{"\frac{0}{0}"}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}\cdot 2 + 4e^{2x} + 2x4e^{2x}} \quad 3 \quad = \frac{4}{4+4+0} = \frac{1}{2} \quad 2$$

c, $\lim\limits_{x \to 0} (\cosh(x))^{\frac{3}{\sinh^2 x}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\ln \cosh(x)^{\frac{3}{\sinh^2(x)}}}$ (4) $=$

$\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{3 \ln(\cosh(x))}{\sinh^2(x)}}$ az e^x folytonossága miatt kiszámíthatjuk külön a kitevő határértékét. (2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \ln(\overbrace{\cosh(x)}^{\to 1})}{\underbrace{\sinh^2(x)}_{\to 0}} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{3 \frac{1}{\cosh(x)} \cdot \cancel{\sinh(x)}}{2 \cdot \cancel{\sinh(x)} \cdot \underbrace{\cosh(x)}_{\to 1}} = \frac{3}{2}$$ (3)

Innen az eredeti határérték $e^{3/2}$. (1)

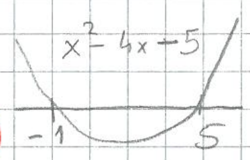
(5) $f(x) = (x^2 - 7) e^{-x}$ konvexitás, inflexiós pontok?

$\boxed{18}$

$f'(x) = 2x e^{-x} + (x^2 - 7)(-e^{-x}) = e^{-x}(-x^2 + 2x + 7)$ (4)

$f''(x) = -e^{-x}(-x^2 + 2x + 7) + e^{-x}(-2x + 2) = e^{-x}(x^2 - 2x - 7 - 2x + 2)$

$= e^{-x}(x^2 - 4x - 5)$ (4) $= \underbrace{e^{-x}}_{> 0}(x+1)(x-5)$ (4)



Azaz $f'' < 0$ $(-1, 5)$-on itt a fv konkáv (2)

$f'' > 0$ $(-\infty, -1)$-en, $(5, \infty)$-en itt a fv konvex, (2)

az $x = -1$ és $x = 5$ pontokban inflexiója van. (2)